

## DS2 – Électrocinétique

**Durée : 4h.**

**L'usage de la calculatrice est autorisé.**

**L'annexe 1 est à rendre avec la copie.**

Si au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**RCO** Des questions de cours sont identifiées dans le sujet par le sigle **RCO** dans la marge.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Toute démarche engagée, même non aboutie, et toute prise d'initiative seront valorisées.

**On veillera particulièrement au respect des notations de l'énoncé :  
symboles, majuscules/minuscules, etc.**

### Critères d'évaluation de la présentation

<b>Présentation générale</b>	La copie est propre, aérée et lisible. L'orthographe est correcte. Les expressions littérales sont encadrées et les A.N. soulignées. Les pages sont numérotées.
<b>Rédaction</b>	Le vocabulaire scientifique est précis. Les réponses sont claires, explicites et succinctes. Les lois, principes et théorèmes utilisés sont nommés.
<b>Schémas</b>	Les schémas sont suffisamment grands : plus petit que la carte étudiant = invisible. Les schémas sont soignés : règle et compas. Utilisation pertinente de la couleur.
<b>Expressions littérales</b>	Le résultat est celui demandé par l'énoncé. Les notations de l'énoncé sont respectées. Les expressions sont homogènes. Respect des notations : grandeurs algébriques, vectorielles, scalaires, etc. Pas de mélange entre les A.N. et E.L.
<b>Applications numériques</b>	La valeur numérique est accompagnée de son unité. L'A.N. est complète : pas de fraction restante, etc. Le nombre de chiffres significatifs est adapté. Les conversions sont effectuées correctement.
<b>Représentations graphiques</b>	Le graphique est suffisamment grand. Les axes sont tracés à la règle, nommés et les unités sont indiquées (si A.N.). Les limites et valeurs notables, les comportements asymptotiques sont respectés. Les courbes sont tracées à main levée, les droites à la règle, etc.

## Exercice 1 – Soufflant électrique

Un soufflant est constitué d'un moteur permettant de faire tourner une hélice et d'un système de résistances chauffantes permettant de chauffer l'air ventilé. On le modélise par le circuit représenté Fig. 1.

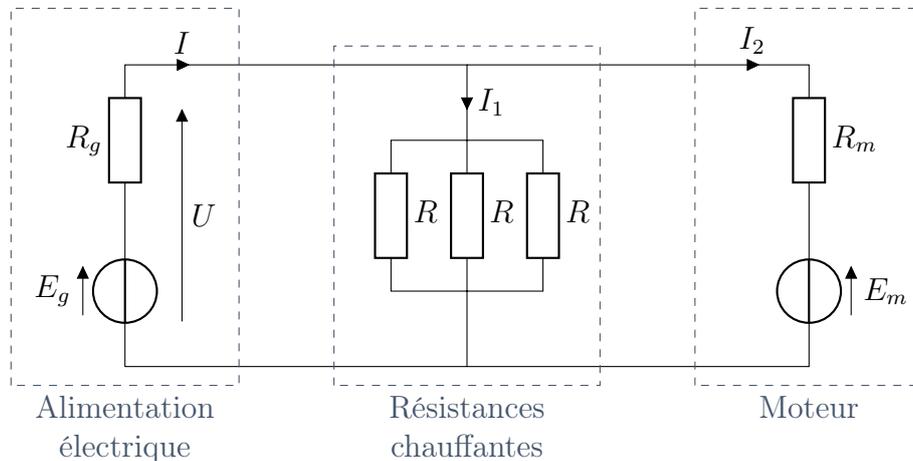


FIGURE 1 – Schéma électrique d'un soufflant.

- RCO 1. Comment appelle-t-on le modèle utilisé pour décrire l'alimentation électrique ? Exprimer la tension  $U$  aux bornes de l'alimentation en fonction de la force électromotrice (f.é.m.)  $E_g$ , de l'intensité  $I$  du courant et de la résistance  $R_g$ .
- RCO 2. Exprimer la résistance  $R_c$  équivalente au système de résistances chauffantes en fonction de  $R$ . Reproduire le schéma électrique simplifié.
- RCO 3. Exprimer l'intensité  $I_R$  du courant qui traverse chacune de ces résistances en fonction de  $I_1$ . Comment nomme-t-on l'effet responsable du chauffage ?
4. Exprimer  $I_1$  et  $I_2$  en fonction de  $I$ ,  $E_g$ ,  $R_g$ ,  $E_m$ ,  $R_m$  et  $R$ .  
On donne  $R = 30 \Omega$ ,  $E_g = 20 \text{ V}$  et  $E_m = 16 \text{ V}$ . De plus,  $R_g = R_m = \frac{R}{30}$ .
5. Montrer que

$$I = \frac{E_g \left( \frac{1}{R_m} + \frac{3}{R} \right) - \frac{E_m}{R_m}}{1 + \frac{3R_g}{R} + \frac{R_g}{R_m}}.$$

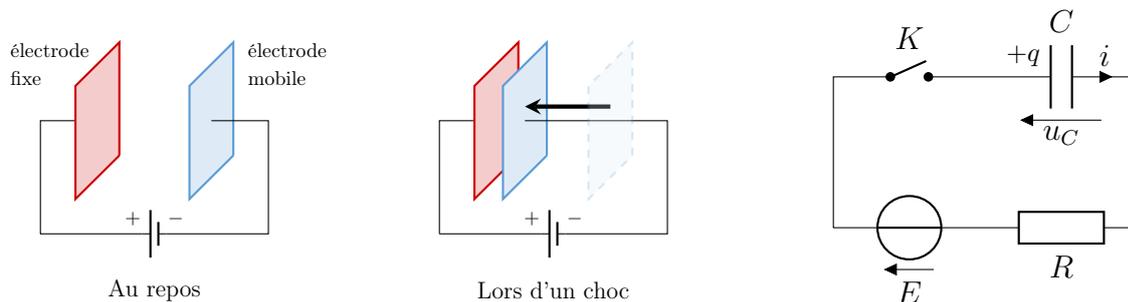
6. Simplifier l'expression pour exprimer  $I$  en fonction de  $E_g$ ,  $E_m$  et  $R$  seulement. Faire l'application numérique.
7. Calculer numériquement les valeurs des intensités  $I_1$  et  $I_2$ .
8. Exprimer la puissance  $\mathcal{P}_g$  **fournie** par l'alimentation électrique, correspondant à la puissance consommée par le soufflant. Faire l'application numérique.
9. Exprimer la puissance  $\mathcal{P}_m$  **reçue** par le moteur, correspondant à la puissance transmise à l'hélice. Faire l'application numérique.
10. Exprimer la puissance  $\mathcal{P}_c$  servant à chauffer ( $\mathcal{P}_c > 0$ ). Exprimer également la puissance  $\mathcal{P}_p$  perdue dans les autres résistances. Faire les applications numériques.
11. Vérifier la conservation de la puissance électrique et évaluer le rendement  $\eta$  du soufflant.

## Exercice 2 – Airbag

Les technologies développées dans l'industrie microélectronique ont été transposées avec succès pour fabriquer des microsystèmes électromécaniques (MEMS), c'est-à-dire des systèmes miniaturisés qui intègrent sur une même puce des parties mécaniques (capteurs d'accélération ou de pression, miroirs, micromoteurs) et des circuits électroniques associés. Un des premiers microsystèmes à avoir été développé est l'accéléromètre. Il est entre autres utilisé pour déclencher le gonflage des airbags des véhicules en cas de choc brutal.

L'accéléromètre est constitué de deux pièces en forme de peignes complémentaires. L'une est fixe et constitue le cadre, l'autre est mobile à l'intérieur de ce cadre, suspendue par une lamelle flexible, sans contact entre les deux parties. L'ensemble constitue un condensateur. En cas de choc brutal du véhicule, la partie mobile se déplace par inertie dans le sens opposé au mouvement, comme le passager d'un bus qui est debout et se trouve projeté en avant quand le bus freine (Fig. 2a). Ce changement de distance entre le peigne mobile et le cadre modifie la capacité du condensateur. Dès que le circuit intégré détecte ce changement de capacité, il commande le gonflage de l'airbag, avant même que le conducteur et les passagers du véhicule ne soient projetés en avant.

Nous allons nous intéresser au principe de fonctionnement de ce dispositif. Le peigne mobile et le cadre constituent un condensateur de capacité  $C$ . Il est branché aux bornes d'une pile de résistance interne  $R$  et de force électromotrice  $E$ . Le circuit est modélisé par le schéma de la Fig. 2b. On donne  $C = 100 \text{ pF}$  et  $E = 5 \text{ V}$ .



(a) Rapprochement de l'électrode mobile en cas de choc. (b) Modèle électrique de l'accéléromètre.

FIGURE 2 – Modèle d'un accéléromètre MEMS.

### Comportement de l'accéléromètre en dehors des chocs

La mise sous tension de l'accéléromètre revient à fermer l'interrupteur  $K$  du montage modélisant le dispositif représenté sur la Fig. 2b.

Le condensateur est déchargé avant la fermeture de l'interrupteur. À l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur. Les courbes représentant les variations de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité du courant en fonction du temps sont données sur la Fig. 3 de l'Ann. 1.

- RCO
1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u_C(t)$  aux bornes du condensateur pour  $t > 0$ . En déduire celle vérifiée par l'intensité du courant  $i(t)$ .
  2. Vers quelles valeurs  $u_{C\infty}$  et  $i_\infty$  tendent  $u_C(t)$  et  $i(t)$  en régime permanent? Justifier. Identifier sur la Fig. 3 la courbe correspondant à  $u_C(t)$  et celle correspondant à  $i(t)$ .
- RCO
3. Justifier soigneusement que la condition initiale permettant de résoudre l'équation différentielle sur  $u_C(t)$  est  $u_C(0) = 0$ .

**RCO** 4. Résoudre l'équation différentielle pour obtenir la tension  $u_C(t)$ . En déduire l'expression de l'intensité  $i(t)$  du courant.

 python 5. On souhaite simuler le comportement du circuit à l'aide de la méthode d'Euler. Écrire l'expression à taper à la ligne 12 du code ci-dessous permettant de compléter le tableau  $u$  contenant les valeurs de la tension  $u_C(t)$  aux instants  $t_k$ .

 python 6. Évaluer le nombre  $N$  de points utilisés pour la simulation. Quelles limites peut-on rencontrer en augmentant grandement  $N$ ? Et en le diminuant fortement?

```

1 import numpy as np
2 dt = 1e-12 # pas de temps en seconde
3 t = np.arange(0, 8e-9, dt) # tableau des instants tk,
4 # contenant N valeurs de 0 à 8e-9 s espacées de dt
5 N = len(t) # nombre de valeurs tk
6 E = 5 # tension E en volts
7 tau = 1e-9 # temps caractéristique tau en secondes
8
9 u = np.zeros(N) # initialisation du tableau pour stocker les valeurs uC(tk)
10 u[0] = 0 # condition initiale uC(t=0)
11 for k in range(N-1):
12     # À compléter

```

### Étude graphique

7. Sur l'annexe 1 à rendre avec la copie, délimiter approximativement et nommer les deux régimes de fonctionnement du circuit. Quel est l'ordre de grandeur du temps de charge?

**RCO** 8. Déterminer graphiquement la valeur de la constante de temps du circuit. On fera apparaître les traits de construction sur l'annexe 1, à rendre avec la copie. Commenter, sachant que la durée typique d'un choc est de l'ordre de 200 ms.

9. En déduire la valeur de  $R$ . Cette valeur est-elle en accord avec la courbe de  $i(t)$ ?

10. Déterminer graphiquement sur la Fig. 3 les valeurs de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité du courant en régime permanent. Commenter.

11. En déduire, en régime permanent, la valeur  $q_\infty$  de la charge  $q$  du condensateur définie sur la Fig. 2b.

### Aspects énergétiques

**RCO** 12. Exprimer, puis calculer l'énergie  $\Delta\mathcal{E}_C$  reçue par le condensateur lors de sa charge.

13. Exprimer la puissance instantanée  $\mathcal{P}(t)$  fournie par le générateur idéal de f.é.m.  $E$  en fonction de  $E$ ,  $C$ ,  $\tau$  et  $t$ .

14. En déduire l'expression de l'énergie  $W$  fournie par ce même générateur lors de la charge. Faire l'application numérique.

### Déclenchement de l'airbag

15. D'après le texte, comment se nomment les parties de l'accéléromètre associées aux électrodes fixe et mobile?

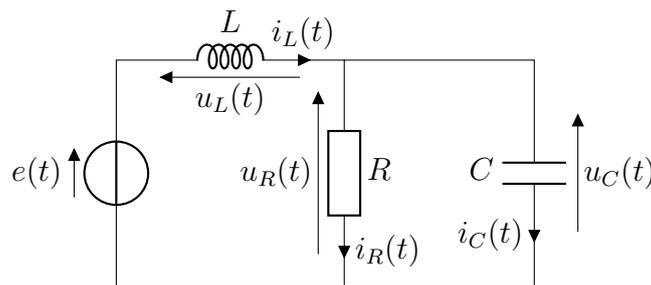
16. D'après vous, comment varie le temps caractéristique du circuit lors d'un choc? Justifier.

### Exercice 3 – Circuit RLC dérivation

Le circuit électrique représenté ci-dessous comprend une résistance  $R$ , une bobine d'inductance  $L$  et un condensateur de capacité  $C$ , toutes constantes. Il est alimenté par un générateur idéal de tension qui délivre un échelon de tension tel que

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E & \text{sinon.} \end{cases}$$

On s'intéresse à l'évolution de la tension  $u_C(t)$  aux bornes du condensateur.



- RCO**
1. La présence de la bobine et du condensateur dans le circuit impose la continuité d'au moins deux grandeurs électriques dans le circuit représenté ci-dessus. Lesquelles ? Justifier.
  2. À l'aide d'un ou plusieurs circuits équivalents, justifier que toutes les grandeurs électriques ( $u_R$ ,  $u_L$ ,  $u_C$ ,  $i_R$ ,  $i_L$  et  $i_C$ ) du circuit sont nulles en  $t = 0^-$ .
  3. Exprimer toutes les grandeurs électriques du circuit en  $t = 0^+$ . Justifier soigneusement. En déduire que

$$u_C(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{0^+} = 0.$$

4. Montrer que, pour  $t \geq 0$ , la tension aux bornes du condensateur vérifie l'équation d'un oscillateur amorti :

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}(t) + \frac{L}{R} \frac{du_C}{dt}(t) + u_C(t) = E. \quad (1)$$

5. Montrer que la nature du régime transitoire dépend de la valeur de la résistance  $R$ , comparée à celle d'une résistance critique  $R_c$  dont on donnera l'expression en fonction de  $L$  et  $C$ . À quelle condition sur  $R$  observe-t-on des oscillations amorties ? Interpréter physiquement.

- RCO**
6. Écrire l'équation (1) sous forme canonique et exprimer la pulsation propre  $\omega_0$  et le facteur de qualité  $Q$  en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

- RCO**
7. On se place dans le cas où le régime transitoire présente des oscillations amorties. Comment qualifie-t-on ce régime ? Exprimer la pseudo-pulsation  $\omega$  en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ . En déduire que la pseudo-période est supérieure à la période propre.

8. Établir l'expression de la tension  $u_C(t)$  pour  $t > 0$  en fonction de  $E$ ,  $\omega$ ,  $\tau = 2RC$  et  $t$ .

- RCO**
9. Quel est le temps caractéristique associé à la durée du régime transitoire ?

On considère un condensateur plan formé de deux plaques de surface en regard  $S$  très grande, séparées par une très fine épaisseur  $e$  de vide. Sa capacité s'exprime par

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e},$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité diélectrique du vide. On suppose que cette épaisseur diminue brusquement de  $e$  à  $e' = e/2$ .

10. Quelles sont dans ce cas les grandeurs électriques (capacité, charge électrique, tension électrique, énergie électrique) constante(s) et par quels coefficients respectifs sont multipliées les autres ? Justifier et interpréter physiquement les réponses.

### Exercice 4 – Analyse d'un relevé expérimental

La courbe représentée sur la Fig. 4 de l'annexe 2 représente l'intensité  $i(t)$  du courant mesurée dans un circuit formé d'une bobine et d'un condensateur montés en série avec un GBF imposant un échelon de tension. On admet que la bobine est très bien décrite par une bobine idéale, mais pas le générateur.

1. Pourquoi observe-t-on un amortissement des oscillations ?
2. En exploitant la courbe représentée sur la Fig. 4 de l'annexe 2 à rendre avec la copie, déterminer la hauteur  $E$  de l'échelon de tension, l'inductance  $L$  et la capacité  $C$ .

# Annexes

## Annexe 1 – Accéléromètre

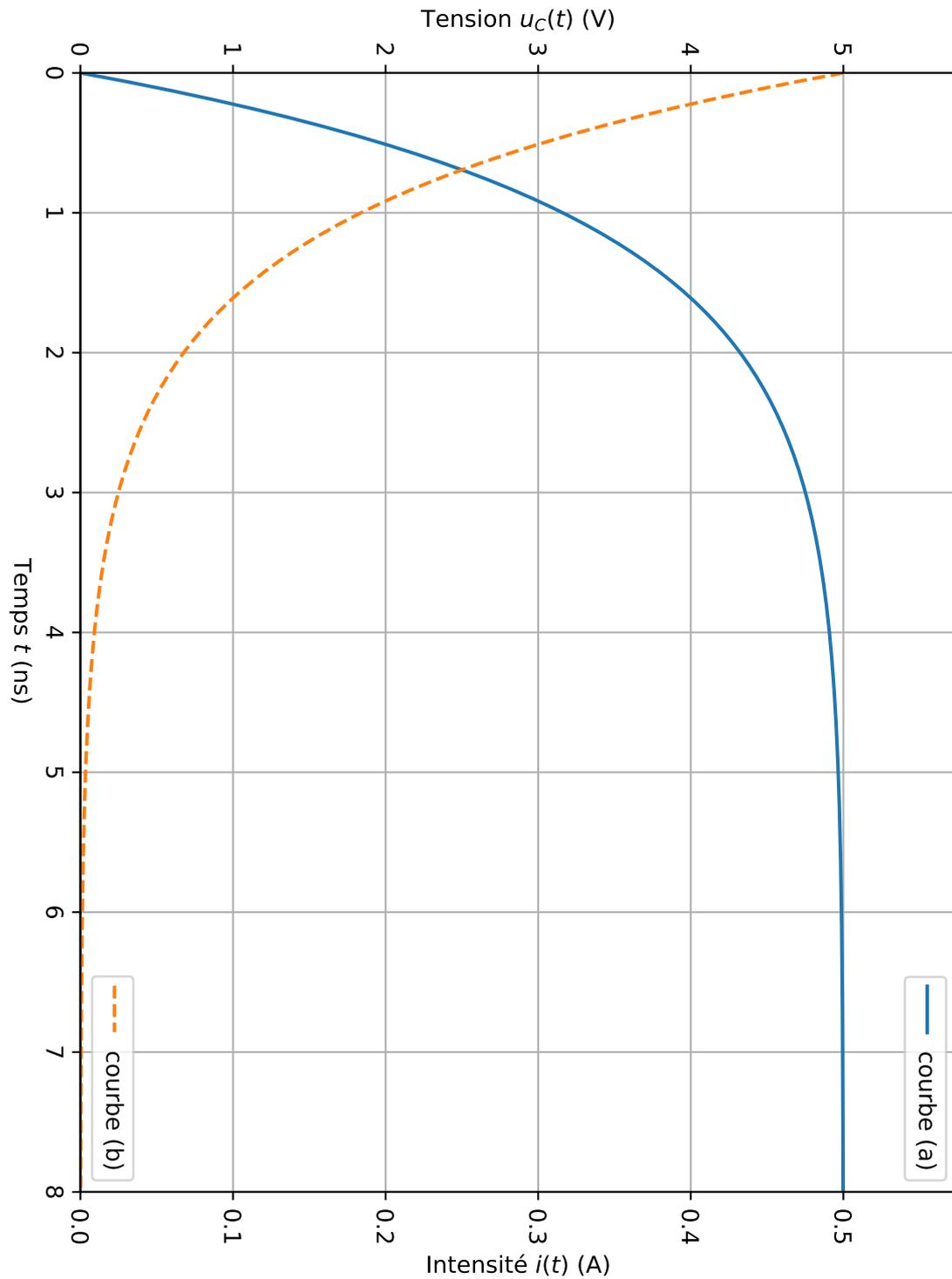


FIGURE 3 – Variations de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité du courant en fonction du temps.

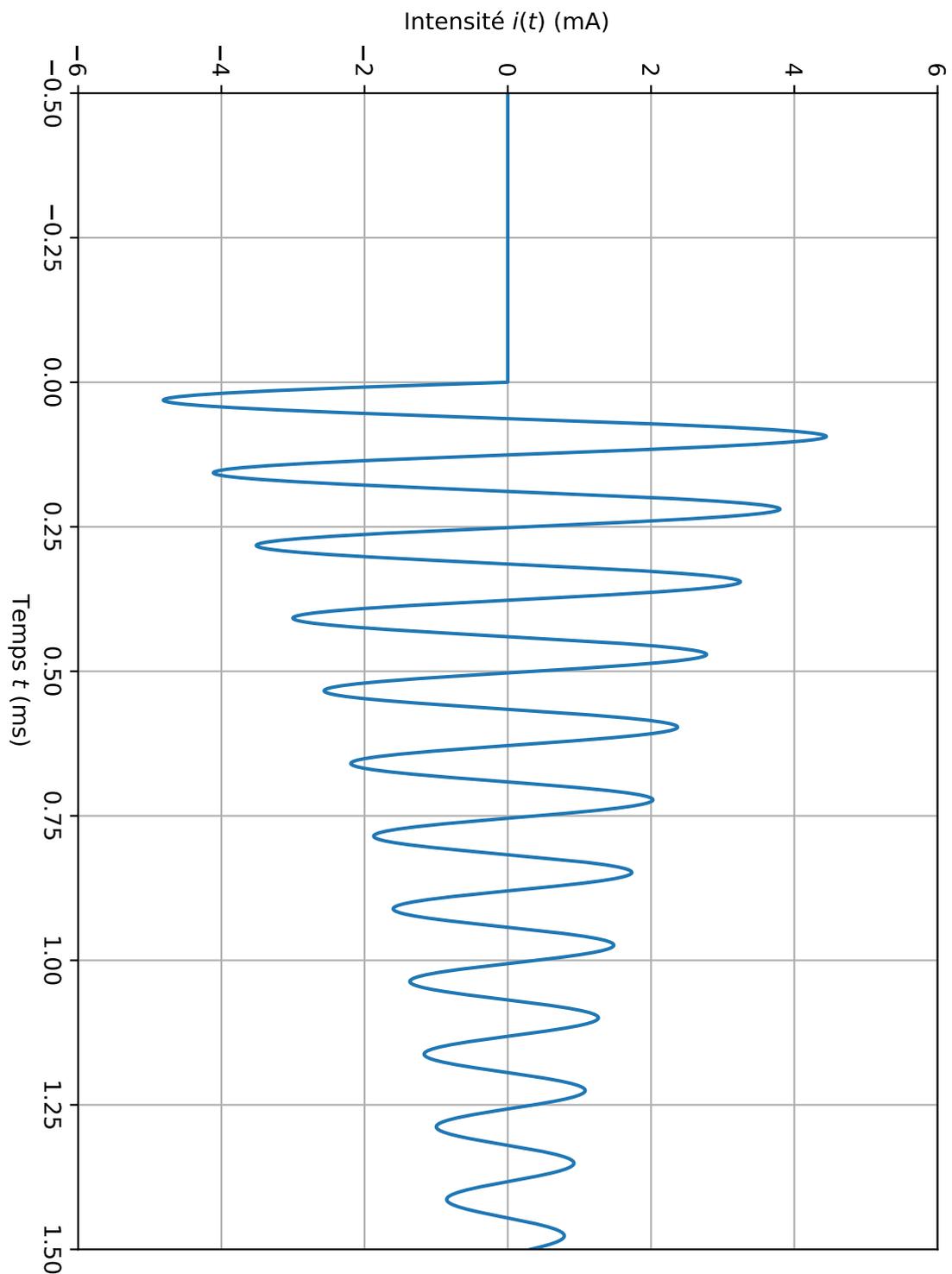
Annexe 2 – Circuit  $LC$  série

FIGURE 4 – Évolution de l'intensité  $i(t)$  dans le circuit  $LC$  série après un échelon de tension en  $t = 0$ .