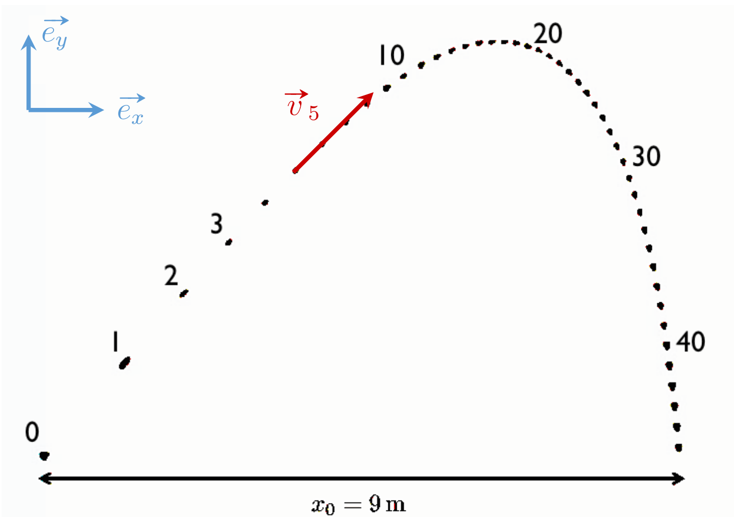
TD M1 – Cinématique du point matériel
Correction

Exercice 1 – Trajectoire d'un volant de badminton

1. Avant la position 5, les points sont alignés et se rapprochent : le mouvement est **rectiligne et décéléré**.
   Après la position 30, les points sont tous espacés de la même distance : le mouvement est **uniforme**.
2. Le mouvement est rectiligne avant M_5, donc le vecteur $\vec{v}_0$ est colinéaire à $\overrightarrow{M_0M_4}$. On relève les coordonnées du point M_4, en considérant que l'origine du repère est confondue avec M_0. On trouve $x_4 = 2{,}4\,\mathrm{cm}$ et $y_4 = 2{,}8\,\mathrm{cm}$, d'où
   $$\boxed{\theta_0 = \arctan\left(\frac{y_4}{x_4}\right).}$$
   A.N. : $\theta_0 \approx 49°$.
3. Sur la chronophotographie, on mesure $8{,}5\,\mathrm{cm} \leftrightarrow 9\,\mathrm{m}$. D'autre part, l'intervalle de temps δt entre deux positions successives est
   $$\delta t = \frac{1}{25} = 45\,\mathrm{ms}.$$
   Pour v_0, on mesure la distance entre les points M_0 et M_1, soit $1{,}7\,\mathrm{cm}$, d'où $M_0M_1 = 1{,}8\,\mathrm{m}$. Finalement,
   $$\boxed{v_0 \approx \frac{M_0M_1}{\delta t} = 45\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.}$$
   Pour v_∞, on mesure la vitesse instantanée à la position 40 où le mouvement est uniforme. On a
   $$\boxed{v_\infty = \frac{M_{40}M_{41}}{\delta t} = \frac{M_{40}M_{45}}{5\delta t} = 6{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.}$$
4. On mesure $v_5 = 15\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. On représente le vecteur $\vec{v}_5$ colinéaire à $\overrightarrow{M_5M_6}$.



Exercice 2 – Étude d'une loi horaire

$$x(t) = 4t^2, \quad y(t) = 4(t - t^3/3) \quad \text{et} \quad z = 3t + t^3.$$

1. En coordonnées cartésiennes, le vecteur vitesse s'obtient simplement en dérivant les coordonnées du vecteur position :

$$\boxed{\vec{v} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z} = 8t\vec{e_x} + 4(1 - t^2)\vec{e_y} + 3(1 + t^2)\vec{e_z}.}$$

Sa norme vaut

$$\boxed{v = \|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = 5 + 5t^2.}$$

2. On a directement

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{v}\mathrm{d}t.}$$

3. En dérivant à nouveau, on obtient

$$\boxed{\vec{a} = 8\vec{e_x} - 8t\vec{e_y} + 6t\vec{e_z},}$$

puis

$$\boxed{a = \|\vec{a}\| = \sqrt{64 + 100t^2}.}$$

Exercice 3 – Pour aller danser le jerk

1. En coordonnées polaires, on a

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta}.}$$

2. Par définition, on a $\vec{j} = \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}$, d'où

$$\vec{j} = (\dddot{r} - \dot{r}\dot{\theta}^2 - 2\dot{r}\dot{\theta}\ddot{\theta})\vec{e_r} + (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\frac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t} + (2\ddot{r}\dot{\theta} + 2\dot{r}\ddot{\theta} + \dot{r}\ddot{\theta} + r\dddot{\theta})\vec{e_\theta} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\frac{\mathrm{d}\vec{e_\theta}}{\mathrm{d}t}$$

En utilisant à nouveau que $\frac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{e_\theta}$ et $\frac{\mathrm{d}\vec{e_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\vec{e_r}$, et après calcul, on obtient :

$$\boxed{\vec{j} = (\dddot{r} - 3\dot{r}\dot{\theta}^2 - 3r\dot{\theta}\ddot{\theta})\vec{e_r} + (3\ddot{r}\dot{\theta} - r\dot{\theta}^3 + 3\dot{r}\ddot{\theta} + r\dddot{\theta})\vec{e_\theta}.}$$

3. Pour un mouvement circulaire, $r = R = \text{cste}$, d'où

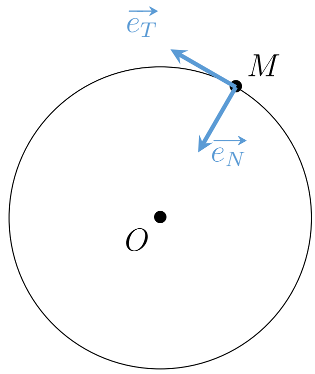
$$\boxed{\vec{j} = -3R\dot{\theta}\ddot{\theta}\vec{e_r} + R(\dddot{\theta} - \dot{\theta}^3)\vec{e_\theta}.}$$

Pour un mouvement circulaire et uniforme, on a de plus $\dot{\theta} = \omega = \text{cste}$, soit

$$\boxed{\vec{j} = -R\omega^3\vec{e_\theta}.}$$

Exercice 4 – Satellite géostationnaire

1. On suppose que le mouvement se fait dans le sens trigonométrique.



2. Le satellite fait un tour complet en un temps T, d'où

$$\boxed{v = \frac{2\pi r}{T}.}$$

3. Dans la base de Frenet, l'accélération du point M vaut

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r}\overrightarrow{e_N}$$

car le mouvement est uniforme. D'après l'énoncé, on a donc

$$\frac{v^2}{r} = g_0\left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

En remplaçant v par l'expression obtenue précédemment et avec $h = r - R$, on obtient après calcul

$$\boxed{h = \left(\frac{g_0 R^2 T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R.}$$

A.N. : avec $T = 24\,\mathrm{h}$, $h \approx 36 \times 10^3\,\mathrm{km}$.

4. On a

$$\boxed{v = \frac{2\pi(R+h)}{T} = \left(\frac{2\pi g_0 R^2}{T}\right)^{\frac{1}{3}}.}$$

A.N. : $v \approx 3{,}1\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

★★★

Exercice 5 – Mouvement circulaire

1. Pour $t \geqslant 0$, l'accélération angulaire $\ddot{\theta}(t)$ vaut $-\alpha_0$. On intègre en tenant compte de la condition initiale $\dot{\theta}(t=0) = \omega_0$, soit

$$\dot{\theta}(t) = \omega_0 - \alpha_0 t.$$

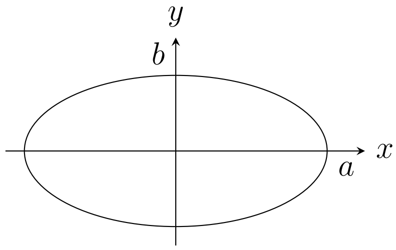
La particule s'arrête quand sa vitesse angulaire s'annule, soit au bout d'un temps

$$\boxed{\Delta t = \frac{\omega_0}{\alpha_0}.}$$

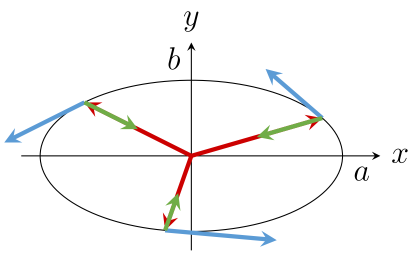
2. La distance parcourue s'exprime
$$L = \int_0^L \mathrm{d}\ell = \int_0^{\Delta t} v\mathrm{d}t.$$
Pour un mouvement circulaire, on a $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$, d'où
$$L = \int_0^{\Delta t} R(\omega_0 - \alpha_0 t)\mathrm{d}t,$$
soit
$$\boxed{L = \frac{R\omega_0^2}{2\alpha_0}.}$$

Exercice 6 – Mouvement elliptique

1. D'après l'équation cartésienne de l'ellipse, la valeur maximale de x est inférieure où égale à a. D'autre part, on veut $x(0) = a$, soit $\alpha \cos\varphi = a$. On a donc nécessairement
$$\alpha = a \quad \text{et} \quad \varphi = 0.$$
De même, la condition initiale $y(0) = 0$, impose $\psi = 0$ et l'équation cartésienne donne $\beta = b$.
On a donc
$$\boxed{x(t) = a\cos(\omega t) \quad \text{et} \quad y(t) = b\sin(\omega t).}$$
Ce choix des phases à l'origine est cohérent avec le sens de parcours de l'ellipse.



2. On a $\overrightarrow{OM} = a\cos(\omega t)\vec{e_x} + b\sin(\omega t)\vec{e_y}$, d'où
$$\boxed{\vec{v} = -a\omega\sin(\omega t)\vec{e_x} + b\omega\cos(\omega t)\vec{e_y} \quad \text{et} \quad \vec{a} = -a\omega^2\cos(\omega t)\vec{e_x} + -b\omega^2\sin(\omega t)\vec{e_y}.}$$
3. On remarque que $\vec{a} = -\omega^2\overrightarrow{OM}$: $\vec{a}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont **colinéaires et de sens opposés**.
4. Avec le code couleur suivant $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$:



Exercice 7 – Spirale logarithmique

1. Avec

$$r(t) = be^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad \theta(t) = \omega t,$$

on a

$$\dot{r}(t) = -\frac{b}{\tau}e^{-t/\tau}, \quad \ddot{r}(t) = \frac{b}{\tau^2}e^{-t/\tau}, \quad \dot{\theta}(t) = \omega \quad \text{et} \quad \ddot{\theta}(t) = 0.$$

On en déduit

$$\boxed{\vec{v}(t) = be^{-t/\tau}\left(-\frac{1}{\tau}\vec{e_r} + \omega\vec{e_\theta}\right) \quad \text{et} \quad \vec{a}(t) = be^{-t/\tau}\left(\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)\vec{e_r} - \frac{2\omega}{\tau}\vec{e_\theta}\right).}$$

2. On a

$$\boxed{v = \|\vec{v}\| = \frac{b}{\tau}e^{-t/\tau}\sqrt{1+\omega^2\tau^2} \quad \text{et} \quad a = \|\vec{a}\| = \frac{b}{\tau^2}e^{-t/\tau}\sqrt{1+2\omega^2\tau^2+\omega^4\tau^4}.}$$

3. Par définition, on a

$$\overrightarrow{OM}\cdot\vec{v} = OM\cdot v\cdot\cos\theta,$$

où θ est l'angle formé entre le vecteur position et le vecteur vitesse. On a donc

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{v}}{OM\cdot v} = \frac{-\frac{b^2}{\tau}e^{-2t/\tau}}{\frac{b^2}{\tau}e^{-2t/\tau}\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}.$$

L'angle θ est donc constant : **l'angle formé entre le vecteur position et le vecteur vitesse est indépendant de la position**.

4. On a par définition

$$L = \int_0^L \mathrm{d}\ell = \int_0^\infty v\mathrm{d}t.$$

En effet, $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \vec{v}\mathrm{d}t$ et la distance L est parcourue atteinte quand $t\to\infty$. On en déduit

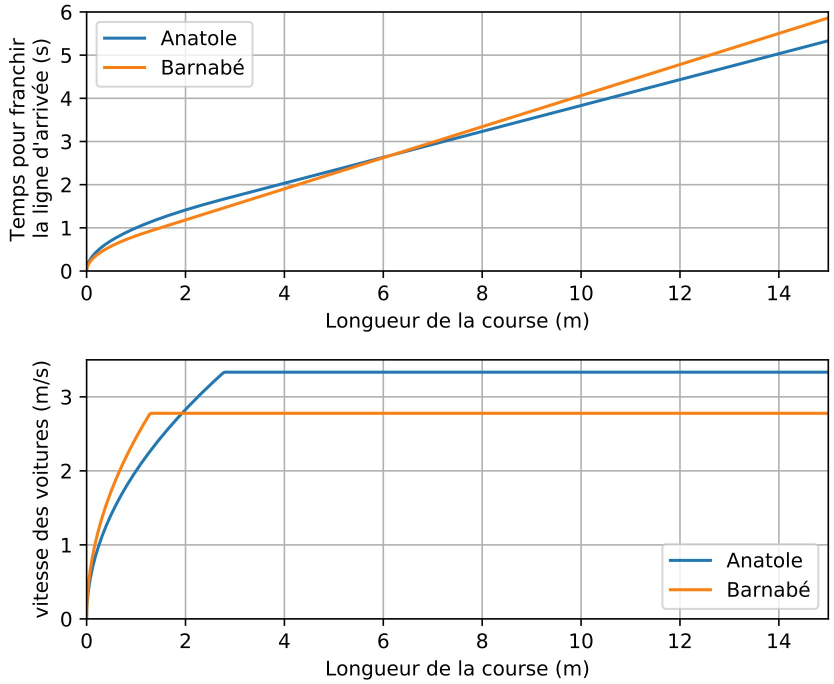
$$L = \int_0^\infty \frac{b}{\tau}e^{-t/\tau}\sqrt{1+\omega^2\tau^2}\mathrm{d}t = \frac{b}{\tau}\sqrt{1+\omega^2\tau^2}\int_0^\infty e^{-t/\tau}\mathrm{d}t, \quad \text{or} \quad \int_0^\infty e^{-t/\tau}\mathrm{d}t = \tau,$$

d'où

$$\boxed{L = b\sqrt{1+\omega^2\tau^2}.}$$

Exercice 8 – Course de voitures radio-télécommandées

1. On note a_X l'accélération d'une voiture et v_X sa vitesse maximale. Avec un départ arrêté ($v(0) = 0$), durant la phase d'accélération, la vitesse s'exprime $v(t) = a_X t$. La vitesse maximale est atteinte après un temps t_X tel que $v(t_X) = v_X$, qui correspond à une distance parcourue $d_X = a_X t_X^2/2$, soit
$$d_X = \frac{v_X^2}{2a_X}.$$
A.N. : $d_A \approx 2{,}8\,\mathrm{m}$ et $d_B \approx 1{,}3\,\mathrm{m}$: les voitures atteignent leur vitesse limite avant la ligne d'arrivée.
Le temps pour parcourir la distance $L - d_X$ restante à la vitesse v_X vaut simplement $(L - d_X)/v_X$. La voiture X atteint donc l'arrivée en un temps
$$\boxed{\Delta t_X = \frac{v_X}{2a_X} + \frac{L}{v_X}.}$$
A.N. : $\Delta t_A \approx 5{,}3\,\mathrm{s}$ et $\Delta t_B \approx 5{,}9\,\mathrm{s}$: **Anatole l'emporte**.
2. On note L' la distance telle que les voitures arrivent en même temps à la ligne d'arrivée. En supposant que cette distance est suffisante pour que les voiture aient atteint leur vitesse maximale, on a L' vérifie
$$\frac{v_A}{2a_A} + \frac{L'}{v_A} = \frac{v_B}{2a_B} + \frac{L'}{v_B},$$
soit
$$\boxed{L' = \frac{1}{2}\left(\frac{v_B}{a_B} - \frac{v_A}{a_A}\right)\frac{v_A v_B}{v_B - v_A}.}$$
A.N. : $L' = 6{,}2\,\mathrm{m}$: on vérifie $L' < d_A$ et $L' < d_B$. **Barnabé doit choisir une distance inférieure à L' pour gagner**.



★★★ Exercice 9 – Parcours d'un cycliste sur un vélodrome

1. Entre D et E_1, l'accélération est constante. La vitesse est nulle en D, d'où $v(t) = a_1 t$ pour $t \in [0, t_{E_1}]$. Le temps t_{E_1} pour atteindre E_1 est tel que

$$\frac{L}{2} = \int_0^{t_{E_1}} v \mathrm{d}t = \frac{a_1}{2} t_{E_1}^2.$$

On en déduit :

$$\boxed{t_{E_1} = \sqrt{\frac{L}{a_1}} \quad \text{et} \quad v_{E_1} = \sqrt{La_1}.}$$

2. Dans le virage, le mouvement est circulaire, d'où $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ et $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$. L'accélération tangentielle est donc $a_\theta = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ (on retrouve le résultat du repère de Frenet). Pour $t \in [t_{E1}, t_{S_1}]$, on a donc

$$v(t) = v(t_{E_1}) + a_1(t - t_{E_1}) = a_1 t$$

(on obtient le même résultat en intégrant $\ddot{\theta}$). L'instant t_{S_1} est tel que la distance parcourue depuis $t = t_{E_1}$ vaut πR, soit

$$\pi R = \int_{t_{E_1}}^{t_{S_1}} v \mathrm{d}t = \frac{a_1}{2}(t_{S_1}^2 - t_{E_1}^2).$$

Après calcul, on obtient

$$\boxed{t_{S_1} = \sqrt{\frac{L + 2\pi R}{a_1}} \quad \text{et} \quad v_{S_1} = \sqrt{(L + 2\pi R)a_1}.}$$

3. En raisonnant de même, on trouve

$$\boxed{t_{E_2} = \sqrt{\frac{3L + 2\pi R}{a_1}} \quad \text{et} \quad v_{E_2} = \sqrt{(3L + 2\pi R)a_1},}$$

$$\boxed{t_{S_2} = \sqrt{\frac{3L + 4\pi R}{a_1}} \quad \text{et} \quad v_{S_1} = \sqrt{(3L + 4\pi R)a_1}.}$$

et finalement

$$\boxed{t_D = 2\sqrt{\frac{L + \pi R}{a_1}} \quad \text{et} \quad v_D = 2\sqrt{(L + \pi R)a_1}.}$$

Remarque : tout se passe comme si la course se faisait à accélération constante a_1 en ligne droite sur une distance $2L + 2\pi R$. Ce n'est pas surprenant : l'accélération tangentielle est la seule qui fasse varier la norme du vecteur vitesse. La composante de l'accélération radiale orthogonale à la trajectoire n'est responsable que des changements de direction de $\vec{v}$, c'est-à-dire de l'allure de la trajectoire.

4. On a $t_D = t_1$ si

$$\boxed{a_1 = 4\frac{L + \pi R}{t_1^2}.}$$

A.N. : $a_1 = 1{,}51\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ et $v_1 = 27{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 99\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. L'hypothèse d'une accélération constante sur un tour complet n'est pas raisonnable. Elle doit décroitre après le départ.

Exercice 10 – Ballon sonde

1. On a $v_z(t) = v_0$ pour $t > 0$, d'où

   $$\boxed{\dot{z}(t) = v_0.}$$

   La résolution avec la condition initiale $z(t = 0) = 0$ donne

   $$\boxed{z(t) = v_0 t.}$$

2. On a $v_x(t) = z(t)/\tau$, d'où

   $$\boxed{\dot{x}(t) = \frac{v_0}{\tau} t.}$$

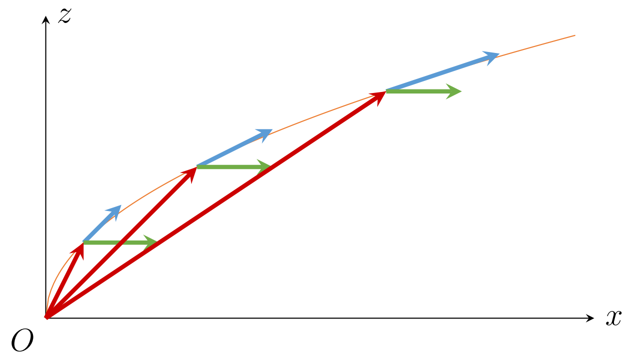
   La résolution avec la condition initiale $x(t = 0) = 0$ donne

   $$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{2\tau} t^2.}$$

3. On en déduit

   $$x(z) = \frac{z^2}{2v_0\tau}, \quad \text{soit} \quad \boxed{z(x) = \sqrt{2v_0\tau x}.}$$

4. Avec le code couleur $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$:



5. Le vecteur accélération s'obtient en dérivant le vecteur vitesse :

   $$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{v_0}{\tau} \vec{e_x}.}$$

   La vitesse selon $\vec{e_z}$ est constante, donc l'accélération selon $\vec{e_z}$ est nulle.

Exercice 11 – May the force be with you

1. La distance parcourue selon (Ox) après la sixième cheminée est $6L$. Elle est parcourue à vitesse constante v_0 en un temps Δt, d'où

   $$\boxed{v_0 = \frac{6L}{\Delta t}.}$$

   A.N. : $v_0 = 100\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 360\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

2. L'équation de la trajectoire est une sinusoïde de période spatiale $2L$. En posant Y_0 l'amplitude de la sinusoïde, on a

$$y(x) = Y_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right),$$

avec $x(t) = v_0 t$. On en déduit les équations horaires du mouvement :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t\,; \\ y(t) = Y_0 \sin\left(\dfrac{\pi v_0}{L} t\right), \end{cases}$$

puis les vecteurs vitesse et accélération, en coordonnées cartésiennes

$$\vec{v}(t) = v_0 \vec{e_x} + Y_0 \frac{\pi v_0}{L} \cos\left(\frac{\pi v_0}{L} t\right) \vec{e_y} \quad \text{et} \quad \vec{a}(t) = -Y_0 \left(\frac{\pi v_0}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi v_0}{L} t\right) \vec{e_y}.$$

Pour que l'accélération du véhicule reste inférieure à $10g$, on doit avoir

$$Y_0 \left(\frac{\pi v_0}{L}\right)^2 < 10g, \quad \text{soit} \quad \boxed{Y_0 < \frac{10gL^2}{\pi^2 v_0^2}.}$$

A.N. : $Y_0 < 40\,\mathrm{m}$. Cela signifie qu'il passe au plus à 40 m des cheminées, tout en maintenant une vitesse supérieure à $360\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Impressionnant, mais routinier pour un Jedi !

Exercice 12 – Parking hélicoïdal

Lorsqu'il fait un tour complet, l'automobiliste a parcouru une distance $d = \sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2}$. Il fait un tour en $T = d/v_0$, donc la vitesse angulaire vaut $\omega = 2\pi/T$. Par ailleurs, la vitesse selon $\vec{e_z}$ est constante.

En coordonnées cylindriques, on a donc

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2 \vec{e_r} \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{a} = -\frac{4\pi^2 R v_0^2}{4\pi^2 R^2 + h^2} \vec{e_r}.}$$

A.N. : $a = \|\vec{a}\| \approx 0{,}39\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.
Remarque : on peut remarquer que $4\pi R^2 \gg h^2$, d'où

$$a \approx -\frac{v_0^2}{R} \vec{e_r}.$$

L'accélération est proche de celle d'un mouvement circulaire, ce que l'on pouvait remarquer plus tôt dans l'exercice, mais alors, l'exercice perd son intérêt.

Exercice 13 – Cinématique d'un satellite

1. $r(\theta)$ est minimal et vaut r_P quand $\cos\theta$ est maximal, c'est-à-dire pour $\theta = 0$. On a donc

$$r_P = \frac{p}{1+e}.$$

De même, en $\theta = \pi$ où $\cos\theta$ est minimal

$$r_A = \frac{p}{1-e}.$$

On en déduit

$$\boxed{e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P} \quad \text{et} \quad p = \frac{2r_A r_P}{r_A + r_P},}$$

soit, avec $r_A + r_P = 2a$,

$$\boxed{e = 1 - \frac{r_P}{a} \quad \text{et} \quad p = 2r_P - \frac{r_P^2}{a} = r_P(1+e).}$$

A.N. : $e = 0{,}5$ et $p = 12\,000\,\mathrm{km}$.

2. On veut montrer que $\mathcal{C} = \text{cste}$, soit

$$0 = \frac{\mathrm{d}\mathcal{C}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot\theta\right) = 2r\dot r\dot\theta + r^2\ddot\theta = r\left(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta\right).$$

$\mathcal{C}$ est constante si $r = 0$, ce qui ne présente pas d'intérêt, ou si $2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta = 0$.
Dans le repère polaire, on a

$$\vec a = \left(\ddot r - r\dot\theta^2\right)\vec{e_r} + \left(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta\right)\vec{e_\theta}.$$

Selon l'énoncé, l'accélération est purement radiale, donc l'accélération orthoradiale est nulle, d'où $2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta = 0$, ce qui montre le résultat.
$\mathcal{C}$ est donc une constante du mouvement.

3. Toujours dans le repère polaire, on a

$$\vec v = \dot r\vec{e_r} + r\dot\theta\vec{e_\theta}.$$

La vitesse est orthoradiale si $\dot r = 0$, avec

$$\dot r = \frac{pe\dot\theta\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}.$$

qui s'annule pour $\theta = 0$ et π. Ces deux valeurs correspondent bien aux positions du périgée ($\theta = 0$) et de l'apogée ($\theta = \pi$). **Les vitesses au périgée et à l'apogée sont orthoradiales**.

4. Au périgée, on a $v_P = r_P\dot\theta_p$, d'où

$$\boxed{\mathcal{C} = r_P v_P.}$$

A.N. : $\mathcal{C} = 6{,}9 \times 10^{10}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$.

5. À l'apogée, on a $\mathcal{C} = r_A v_A$, d'où

$$v_A = \frac{r_P v_P}{r_A} = \frac{r_P v_P}{2a - r_P}.$$

A.N. : $v_A = 2{,}9 \times 10^3\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$: la vitesse est plus faible à l'apogée qu'au périgée, ce qui correspond aux observations expérimentales.