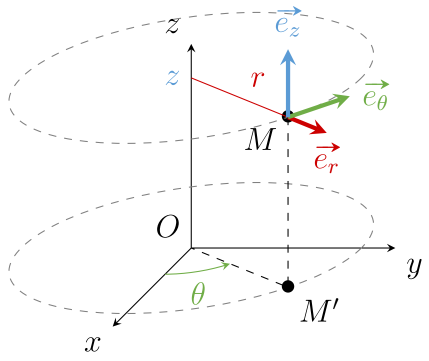
DM09 – Toboggan !

Exercice 1 – Mouvement hélicoïdal dans un toboggan

1. Cf. cours.



2. En coordonnées cylindriques, le vecteur position est donné par

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}.}$$

3. Cf. cours pour la démo. En coordonnées cylindriques, le vecteur vitesse instantanée est donné par

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}.}$$

4. Cf. cours pour la démo. En coordonnées cylindriques, le vecteur accélération est donné par

$$\boxed{\overrightarrow{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}.}$$

5. Avec $r(t) = R = \text{cste}$, on a $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$, d'où

$$\boxed{\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}.}$$

6. On a

$$\boxed{z(\theta) = z_0 - \frac{H\theta}{2\pi}.}$$

On en déduit $\dot{z} = \frac{H\dot{\theta}}{2\pi}$ et $\ddot{z} = \frac{H\ddot{\theta}}{2\pi}$, d'où

$$\boxed{\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - \frac{H\dot{\theta}}{2\pi}\overrightarrow{e_z}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - \frac{H\ddot{\theta}}{2\pi}\overrightarrow{e_z}.}$$

7. Le mouvement est uniforme si $\|\overrightarrow{v}\| = \text{cste}$, c'est-à-dire si

$$\sqrt{R^2\dot{\theta}^2 + \frac{H^2\dot{\theta}^2}{4\pi^2}} = \text{cste} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\theta} = \text{cste}.}$$

8. On a

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{R^2\dot{\theta}^2 - \frac{H^2\dot{\theta}^2}{4\pi^2}} = \sqrt{2g(z_0 - z)}.$$

On élève au carré et on remplace z par son expression en fonction de θ :

$$R^2\dot{\theta}^2 - \frac{H^2\dot{\theta}^2}{4\pi^2} = 2gH\frac{\theta}{2\pi}, \quad \text{soit} \quad \boxed{\dot{\theta}^2\left(R^2 + \frac{H^2}{4\pi^2}\right) = \frac{gH}{\pi}\theta}$$

9. On dérive :

$$2\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta}\left(R^2 + \frac{H^2}{4\pi^2}\right) = \frac{gH}{\pi}\cancel{\dot{\theta}}, \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{\theta} = \frac{gH}{2\pi\left(R^2 + \frac{H^2}{4\pi^2}\right)}.}$$

On intègre une première fois, avec $\dot{\theta}(0) = 0$ (vitesse initiale nulle) :

$$\boxed{\dot{\theta}(t) = \frac{gH}{2\pi\left(R^2 + \frac{H^2}{4\pi^2}\right)}t,}$$

puis une nouvelle fois, avec $\theta(0) = 0$:

$$\boxed{\theta(t) = \frac{gH}{4\pi\left(R^2 + \frac{H^2}{4\pi^2}\right)}t^2.}$$

On en déduit

$$\boxed{z(t) = z_0 - \frac{gH^2}{2(4\pi^2R^2 + H^2)}t^2.}$$

$\theta(t)$ et $z(t)$ sont des **fonctions paraboliques du temps**.