DM10 – Basket-ball

Exercice 1 – Lancer au basket-ball

On s'intéresse à la trajectoire d'un ballon de basket-ball lors d'un lancer. Une fois lancé, le ballon assimilé à son centre de masse M est en chute libre : son accélération s'écrit $\vec{a} = -g\vec{e_z}$, où $\vec{e_z}$ est un vecteur unitaire orienté verticalement vers le haut. Le ballon est lancé à l'instant $t = 0$ à la position $(x = 0, y = 0, z = h)$ avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ formant un angle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ avec l'horizontale. On suppose le vecteur $\vec{v_0}$ contenu dans le plan $(O, \vec{e_x}, \vec{e_z})$.

Équation de la trajectoire

1. Exprimer le vecteur $\vec{v_0}$ en fonction de $v_0 = \|\vec{v_0}\|$, α, $\vec{e_x}$ et $\vec{e_z}$.
2. Établir les expressions des vecteurs vitesse $\vec{v}(t)$ et position $\overrightarrow{OM}(t)$ pour $t > 0$. Justifier que le mouvement est plan et contenu dans le plan $(O, \vec{e_x}, \vec{e_z})$.
3. Exprimer les équations horaires du mouvement.
4. Déterminer l'équation $z(x)$ de la trajectoire.

Analyse de la trajectoire

5. Montrer que l'abscisse x_C pour laquelle $z = 0$ s'exprime

$$x_C = \frac{v_0^2}{g}\left(\frac{\sin(2\alpha)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sin(2\alpha)}{2}\right)^2 + \frac{2gh}{v_0^2}\cos^2\alpha}\right).$$

6. Déterminer l'altitude maximale atteinte z_S.
7. On fixe v_0 et h. Intuitivement, quelle valeur de α permet d'atteindre la plus haute altitude z_S ? Retrouver ce résultat en exploitant l'expression précédemment obtenue.
8. Dans le cas où $h = 0$, déterminer la valeur de α pour laquelle x_C est maximale.
9. On conserve la même valeur de α que dans la question précédente. Pour un lancer au basket-ball (vitesse initiale de l'ordre de $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$), la taille du joueur influe-t-elle beaucoup sur x_C ?

Exercice 2 – Conjonction de planètes

Deux planètes assimilées à deux points matériels M_A et M_B décrivent des orbites circulaires de même centre O dans un même plan, en tournant dans le même sens. Leurs mouvements sont circulaires uniformes, de périodes respectives T_A et T_B.

1. Déterminer la durée séparant deux conjonctions de M_A et M_B, définies par l'alignement des points O, M_A et M_B, dans cet ordre.
2. Calculer cette durée pour Vénus et la Terre, de périodes respectives $T_V = 225$ jours et $T_T = 365$ jours.