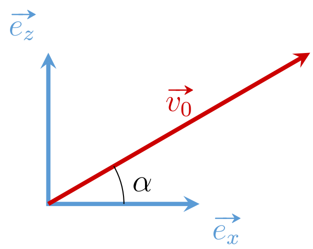
DM10 – Basket-ball

Correction

Exercice 1 – Lancer au basket-ball

1. On commence par faire un schéma !



On en déduit :

$$\boxed{\vec{v_0} = v_0(\cos\alpha\vec{e_x} + \sin\alpha\vec{e_z}).}$$

2. La base cartésienne est fixe, donc on peut intégrer directement les vecteurs accélération puis vitesse. Avec la condition initiale $\vec{v}(0) = \vec{v_0}$, on a

$$\boxed{\vec{v}(t) = -gt\vec{e_z} + \vec{v_0}.}$$

Enfin, avec $\overrightarrow{OM}(0) = h\vec{e_z}$, on a

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\vec{e_z} + \vec{v_0}t + h\vec{e_z}.}$$

Puisque le vecteur $\vec{v_0}$ est contenu dans le plan $(O, \vec{e_x}, \vec{e_z})$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ l'est aussi à tout instant : **le mouvement est contenu dans le plan** $(O, \vec{e_x}, \vec{e_z})$.

3. En projetant le vecteur position selon $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$, on obtient

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 t\cos\alpha \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha + h \end{cases}}$$

4. La première équation horaire donne

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha},$$

d'où, en injectant dans la dernière

$$\boxed{z(x) = -\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha + h.}$$

5. On cherche l'abscisse x_C telle que $z(x_C) = 0$ soit la solution de l'équation

$$0 = -\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha + h.$$

Il s'agit d'une équation polynomiale du deuxième ordre admettant deux racines dont l'une seulement est positive (...)

$$\boxed{x_C = \frac{v_0^2}{g}\left(\frac{\sin(2\alpha)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sin(2\alpha)}{2}\right)^2 + \frac{2gh}{v_0^2}\cos^2\alpha}\right).}$$

Rappel : $\sin(2\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha$.

6. L'altitude maximale est atteinte à l'instant t_S pour lequel $\dot{z}(t_S) = 0$, soit

$$t_S = \frac{v_0\sin\alpha}{g}.$$

On a donc

$$\boxed{z_S = z(t_S) = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha + h.}$$

7. En lançant le ballon verticalement, on maximise l'altitude atteinte, ce qui correspond à $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
z_S est maximale lorsque $\sin^2\alpha = 1$, ce qui correspond bien au cas où

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}.}$$

8. Pour $h = 0$, la portée du tir devient

$$x_C = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha).$$

Cette expression est maximale quand $\sin(2\alpha)$ l'est, c'est-à-dire pour

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}.}$$

9. Avec $\alpha = \frac{\pi}{4}$,

$$x_C = \frac{v_0^2}{g}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{gh}{v_0^2}}\right).$$

On a donc

$$\boxed{\tilde{x}_C = \frac{x_C}{x_C(h=0)} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{gh}{v_0^2}}.}$$

Pour $h = 2\,\text{m}$, on obtient $\tilde{x}_C = 1{,}17$ tandis que pour $h = 1{,}5\,\text{m}$, on a $\tilde{x}_C = 1{,}13$: un grand joueur de $2\,\text{m}$ ne lancera que $4\,\%$ plus loin qu'un joueur de $1{,}5\,\text{m}$. La taille du joueur n'a donc pas beaucoup d'importance sur la distance du lancer.

Exercice 2 – Conjonction de planètes

1. le mouvement est circulaire uniforme, donc à vitesse angulaire constante. On a

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}, \quad \text{d'où} \quad \theta = \frac{2\pi}{T}t + \text{cste}.$$

Une conjonction correspond à un instant où les positions angulaires des deux planètes sont égales, modulo 2π. En prenant comme origine des dates une conjonction, on a donc

$$\theta_A(0) - \theta_B(0) = 0.$$

La suivante, séparée de la première d'une durée Δt intervient donc quand

$$\theta_A(\Delta t) - \theta_B(\Delta t) = 2\pi.$$

On a donc

$$\frac{2\pi}{T_A}\Delta t - \frac{2\pi}{T_B}\Delta t = 2\pi, \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta t = \frac{T_A T_B}{T_B - T_B}.}$$

2. On a

$$\boxed{\Delta t = \frac{T_T T_V}{T_T - T_V}.}$$

A.N. : $\Delta t \approx 587\,\text{jours}$.