Chapitre M3 – Énergie mécanique

Plan du cours

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

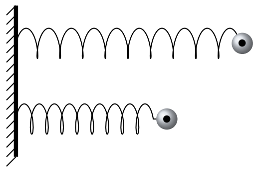
→ Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.
→ Exploiter le théorème de l'énergie cinétique.
→ Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique.
→ Déduire qualitativement du graphe d'une fonction énergie potentielle le sens et l'intensité de la force associée pour une situation à un degré de liberté.
→ Exploiter la conservation de l'énergie mécanique pour analyser un mouvement.
→ Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel.
→ Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
→ Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre.
→ Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.
→ Établir l'équation différentielle linéarisée du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre.

Questions de cours

→ Citer les théorèmes de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique.
→ Citer, puis établir les expressions des énergies potentielles de pesanteur, gravitationnelle et élastique.
→ Citer les théorèmes de la puissance mécanique et de l'énergie mécanique.
→ Identifier, sur un graphe d'énergie potentielle quelconque les positions d'équilibre stables et instables, les barrières et puits de potentiels.
→ Décrire qualitativement (par exemple, à l'aide d'un graphe commenté) l'évolution temporelle d'un système suivant son énergie mécanique, à partir d'un profil quelconque d'énergie potentielle.
→ Établir l'équation différentielle linéarisée du pendule simple en utilisant le théorème de l'énergie mécanique.

Documents

Document 1 – Énergies potentielles

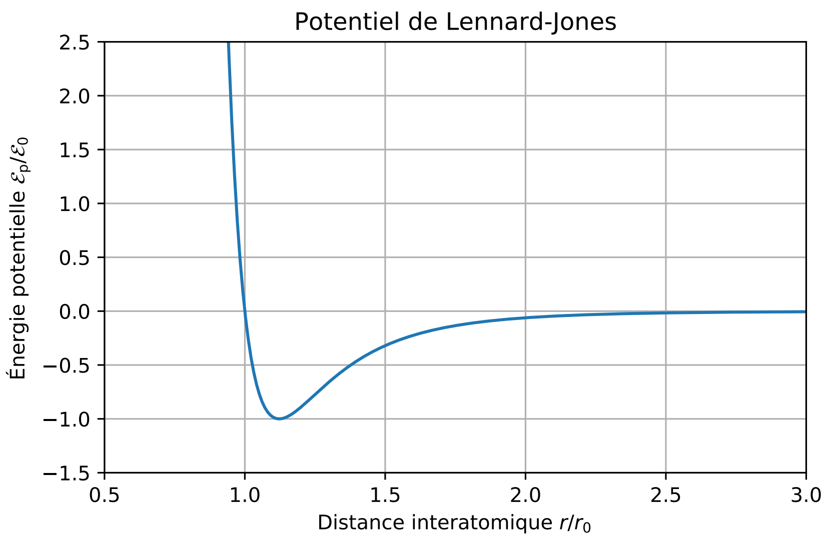
Force	Schéma	Force	Énergie potentielle
Poids		$\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_z}$	
Force de rappel		$\overrightarrow{F_H} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{e_x}$	
Interaction gravitationnelle		$\overrightarrow{F_G} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{e_r}$	

Document 2 – Potentiel de Lennard-Jones

Pour décrire les interactions entre atomes ou molécules, John Lennard-Jones proposa en 1924 un potentiel empirique de la forme :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}}(r) = 4\mathcal{E}_0 \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{6} \right],$$

où $\mathcal{E}_0$ et r_0 sont des constantes. Le terme $(r_0/r)^{12}$ modélise une répulsion à courte distance, tandis que le terme $(r_0/r)^6$ explique l'attraction due aux forces de van der Waals.



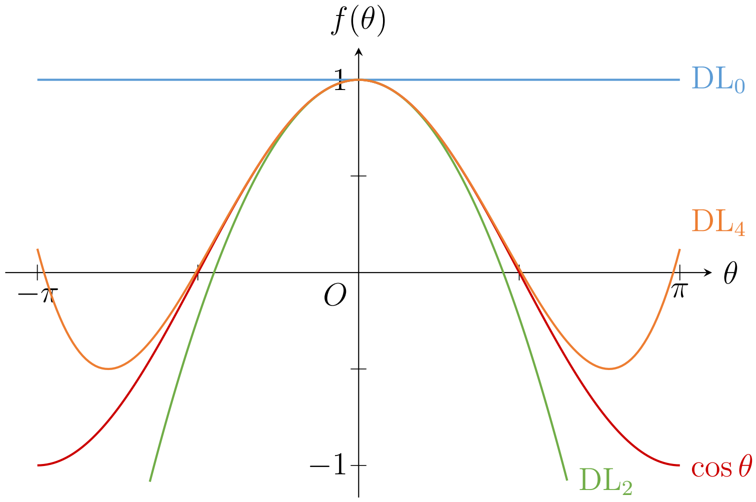
Document 3 – Un premier mot sur les développements limités

Une excellente vidéo sur le sujet : https://youtu.be/3d6DsjIBzJ4.

Dans le cadre de l'*approximation des petits angles*, nous avons vu qu'il était possible d'approcher les fonctions $\sin\theta$, $\cos\theta$ et $\tan\theta$ au voisinage de zéro, c'est-à-dire pour $\theta \ll 1$, par des expressions simples en fonction de θ. Cette approximation est le résultat d'un outils plus général, le développement limité, qui permet d'approcher une fonction, *au voisinage d'un point*, par un polynôme de degré n : on parle alors de *développement limité d'ordre* n, noté DL_n. Par exemple, le développement limité de $\cos\theta$ au voisinage de zéro s'écrit :

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \frac{\theta^6}{720} + \dots$$

Les termes supplémentaires améliorent la précision de l'approximation, comme on peut le voir sur la figure ci-dessous.



Il est fréquent d'approcher l'expression d'une grandeur physique à l'aide d'un développement limité pour se ramener à des équations simples : c'est notamment le cas lors de l'étude du mouvement d'un système au voisinage d'une position d'équilibre. On utilisera fréquemment les développements suivants, au voisinage de zéro :

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &\approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \\
e^x &\approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \\
\ln(1+x) &\approx x - \frac{x^2}{2} + \dots \\
\cos x &\approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\
\sin x &\approx x - \frac{x^3}{3!} + \dots
\end{aligned}$$

De manière générale, la formule de Taylor-Young permet d'obtenir les coefficients du polynôme. Ainsi, au voisinage du point x_0 :

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)(x-x_0) + \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

Applications

Application 1 – Caractère moteur ou résistant d'une force

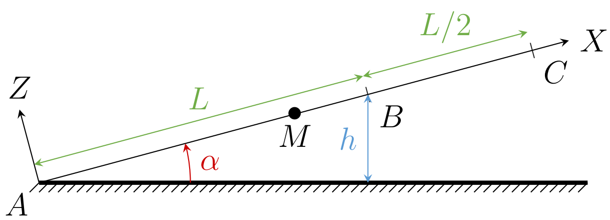
En s'appuyant sur un schéma, justifier du caractère moteur ou résistant des forces extérieures en présence dans les situations décrites ci-dessous.

1. Une pierre de curling après son lancé.
2. Un cycliste à l'assaut du mont Ventoux.
3. Une demi-oscillation du pendule simple.
4. Un vol parabolique chez Air Zéro G (chute libre).

Application 2 – Mouvement sur un plan incliné

On s'intéresse au mouvement d'un point matériel M de masse m entre les points A et B, séparés d'un distance L, sur une rampe inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale.

En plus de son poids, le point M est soumis à la réaction du support $\overrightarrow{R} = R_N\overrightarrow{e_Z} + R_T\overrightarrow{e_X}$, où $|R_T| = \mu R_N$, avec $\mu > 0$. Le signe de R_T est tel que cette réaction tangentielle est opposée au sens du mouvement. On note g l'accélération de la pesanteur.



1. Exprimer $|R_T|$ en fonction de m, g, α et μ.
2. On considère une première trajectoire, où M va directement de A à B. Exprimer les travaux $W_1(\overrightarrow{P})$, $W_1(\overrightarrow{R_N})$ et $W_1(\overrightarrow{R_T})$ du poids, de la réaction normale du support et de la réaction tangentielle.
3. On considère maintenant le cas où M va de A à B en passant par C. Exprimer à nouveau les travaux $W_2(\overrightarrow{P})$, $W_2(\overrightarrow{R_N})$ et $W_2(\overrightarrow{R_T})$. Commenter.

Application 3 – Skieur cinétique

Un skieur de masse $m = 80\,\mathrm{kg}$ descend une piste rectiligne longue de $L = 100\,\mathrm{m}$ et inclinée d'un angle $\alpha = 45°$ par rapport à l'horizontale. On néglige tout d'abord les frottements.

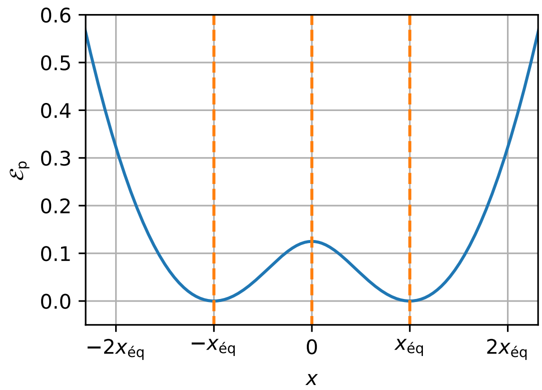
1. Faire un schéma.
2. Exprimer et calculer le travail des deux forces en présence au cours de la descente.
3. En admettant que le skieur part du haut de la piste sans vitesse initiale, déterminer sa vitesse v_f en bas de la piste à l'aide du théorème de l'énergie cinétique.

Application 4 – Profil d'énergie potentielle

Le graphe ci-dessous représente le profil d'énergie potentielle pour un système à un unique degré de liberté x.

1. Indiquer la direction de la force $\overrightarrow{F}$ qui dérive de ce potentiel.

2. Reproduire le graphe et indiquer le sens de $\overrightarrow{F}$ dans les différentes régions.
3. À l'aide d'une inégalité, comparer qualitativement les normes de $\overrightarrow{F}(x_{\text{éq}}/2)$ et $\overrightarrow{F}(2x_{\text{éq}})$.
4. Donner la valeur de $F(-x_{\text{éq}})$.
5. Proposer le schéma d'un système compatible avec ce profil d'énergie potentielle.



Application 5 – Skieur mécanique

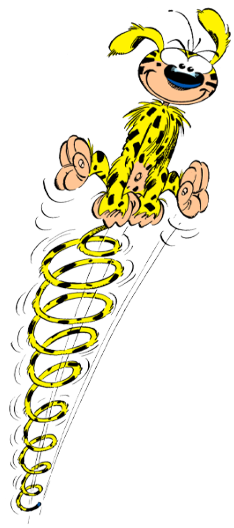
On reprend la situation décrite dans l'App. 3. On prend maintenant en compte les frottements liés au contact avec la piste. Le coefficient de frottement est $\mu = 0{,}5$, de telle sorte que $R_T = \mu R_N$.

1. Exprimer l'énergie potentielle du skieur au sommet de la piste.
2. Exprimer la force de frottement $\overrightarrow{R_T}$, et en déduire son travail lors de la descente.
3. Déterminer alors la vitesse v'_f du skieur en bas de la piste.

Application 6 – Un bond du Marsupilami

Le Marsupilami est un animal de bande dessinée, créé par Franquin, aux capacités physiques remarquables, notamment grâce à sa queue qui possède une force importante. Il peut ainsi sauter en enroulant sa queue comme un ressort entre lui et le sol.

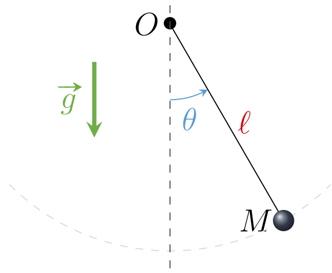
On note $\ell_0 = 2{,}0\,\text{m}$ la longueur à vide du ressort équivalent à la queue du Marsupilami, et k sa constante de raideur. Lorsqu'il est complètement comprimé, la longueur du ressort est $\ell_m = 50\,\text{cm}$. On suppose que le Marsupilami a une masse $m = 50\,\text{kg}$ et que sa queue quitte le sol lorsque le ressort mesure ℓ_0.



1. Exprimer la hauteur h du saut.
2. Déterminer la constante de raideur de la queue du Marsupilami s'il est capable de sauter jusqu'à une hauteur $h = 10\,\text{m}$.
3. Exprimer, puis calculer la vitesse du Marsupilami quand sa queue quitte le sol.

Application 7 – Pendule énergétique

On s'intéresse au mouvement d'une masse m assimilée à son centre de masse M, suspendue à un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable. On néglige les frottements et l'étude est réalisée dans le référentiel terrestre considéré galiléen.



1. Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_\mathrm{c}$ du système, en fonction de m, ℓ et $\dot{\theta}$.
2. Exprimer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_\mathrm{p}$ de pesanteur du système en fonction de m, g, ℓ et θ, de telle sorte que $\mathcal{E}_\mathrm{p}(\theta = 0) = 0$.
3. Représenter graphiquement $\mathcal{E}_\mathrm{p}(\theta)$, pour $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$. Repérer une position d'équilibre stable θ_1, et une position d'équilibre instable θ_2.
4. Décrire qualitativement le mouvement du système, quand son énergie mécanique vaut :

$$\mathcal{E}_1 = mg\frac{\ell}{10} \qquad \mathcal{E}_2 = mg\ell \qquad \mathcal{E}_3 = 3mg\ell$$

5. Exprimer l'énergie mécanique du système pour $\theta \ll 1$. Commenter.
6. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ.