

TD M2 – Dynamique du point matériel

Correction

Exercice 1 – Centres de masse dans le système solaire

Le barycentre G d'un système de deux points matériels M_1 et M_2 , de masses m_1 et m_2 est tel que

$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2},$$

où O est l'origine du repère. En prenant l'origine du repère au point M_1 , on obtient immédiatement

$$\overrightarrow{M_1G} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{M_1M_2}.$$

1. On détermine la position du barycentre G du système {Soleil, Terre}. En notant S le centre du Soleil, on trouve

$$GS = \frac{M_T}{M_S + M_T}D_{\text{Terre} - \text{Soleil}} = 450 \text{ km} \ll R_S.$$

G et S peuvent raisonnablement être confondus.

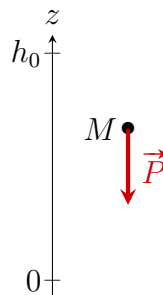
2. Pour le barycentre G' du système {Soleil, Jupiter}, on trouve

$$G'S = \frac{M_J}{M_S + M_J}D_{\text{Jupiter} - \text{Soleil}} = 8 \times 10^5 \text{ km} \approx R_S \ll D_{\text{Jupiter} - \text{Soleil}}.$$

Si l'on s'intéresse au mouvement de Jupiter, on peut raisonnablement confondre G' et S , mais ce n'est plus le cas si l'on s'intéresse au mouvement du Soleil.

Exercice 2 – Un marteau sur la Lune

1. On s'intéresse au mouvement du {marteau} de masse $m = \text{cste}$ dans le référentiel lunaire supposé galiléen.



Il n'est soumis qu'au poids $\vec{P} = m\vec{g}_L = -mg/6\vec{e}_z$. Dans le repère cartésien, le PFD s'écrit

$$m\vec{a} = \vec{P} \Leftrightarrow m(\ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z) = -\frac{mg}{6}\vec{e}_z.$$

Seul le mouvement selon \vec{e}_z est étudié ici : la projection du PFD sur l'axe (Oz) donne

$$\ddot{z} = -\frac{g}{6}.$$

2. On intègre deux fois en utilisant les conditions initiales $\dot{z}(t = 0) = 0$ et $z(t = 0) = h_0$, d'où

$$z(t) = -\frac{g}{12}t^2 + h_0.$$

3. La durée de la chute est telle que $z(t_1) = 0$. La résolution donne

$$t_1 = \sqrt{\frac{12h_0}{g}}.$$

A.N. : $t_1 = 1,35$ s.

La vitesse v_1 est telle que $v_1 = |\dot{z}(t_1)|$. En injectant l'expression précédente, on obtient

$$v_1 = \frac{g}{6}t_1 = \sqrt{\frac{2gh_0}{6}}.$$

A.N. : $v_1 = 2,2$ m · s⁻¹.

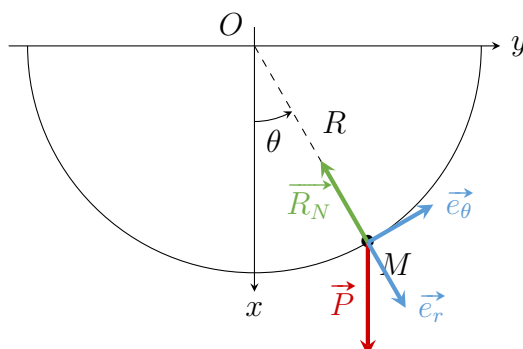
Ces résultats ne dépendent pas de la masse, ils sont les mêmes pour la plume. Ceci peut surprendre, mais c'est normal ici puisque l'on néglige les frottements. Les vidéos confirment d'ailleurs ce résultat.

Exercice 3 – Ça par exemple ! Quel bond !

- $$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha \times t \\ z(t) = -\frac{1}{2}g_L t^2 + v_0 \sin \alpha \times t \end{cases}$$
- $$z(x) = -\frac{1}{2}g_L \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha$$
- $$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g_L} = \frac{6v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$
- Sur Terre, $L' = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{L}{6}$, d'où $L = 6$ m.

Exercice 4 – Oscillations d'un anneau

- On s'intéresse au mouvement du point matériel $\{M\}$ de masse $m = \text{cste}$ dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



Le système est soumis à son poids et à la réaction normale de la tige, les frottements étant négligés. Dans le repère polaire, on a

- $\vec{P} = mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$;
- $\vec{R}_N = R_N \vec{e}_r$, avec a priori $R_N < 0$.

Le mouvement du point M est circulaire de rayon R , son accélération en coordonnées polaires s'exprime

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$

Le PFD s'écrit donc

$$mR(\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \dot{\theta}^2\vec{e}_r) = mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) + R_N \vec{e}_r.$$

On projette sur les vecteurs de la base polaire :

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta + R_N \\ R\ddot{\theta} = -g \sin \theta \end{cases}$$

2. La projection du PFD selon \vec{e}_θ s'intègre facilement après l'avoir multipliée par $\dot{\theta}$:

$$R\dot{\theta}\ddot{\theta} = -g\dot{\theta}\sin \theta \quad \xrightarrow{\text{intégration}} \quad \frac{R\dot{\theta}^2}{2} = g \cos \theta + \text{cste.}$$

Compte tenu des conditions initiales, l'équation devient

$$0 = g \cos \theta_0 + \text{cste}, \quad \text{d'où} \quad \text{cste} = -g \cos \theta_0.$$

Finalement,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(\cos \theta - \cos \theta_0).$$

3. En injectant dans la projection du PFD selon \vec{e}_r , on obtient

$$R_N = -2mg(\cos \theta - \cos \theta_0) - mg \cos \theta, \quad \text{d'où} \quad \vec{R}_N = -mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)\vec{e}_r.$$

4. La réaction est maximale en norme quand $\cos \theta_1$ l'est soit pour

$$\theta_1 = 0.$$

5. Dans l'approximation des petits angles, la projection du PFD selon \vec{e}_θ devient

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0.$$

On retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique.

6. Avec les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, la solution est

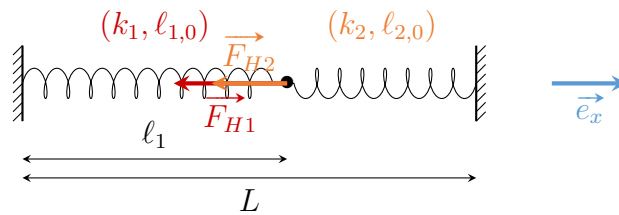
$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t), \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Exercice 5 – Glissade sur un igloo

Corrigé en classe.

Exercice 6 – Deux ressorts

- On s'intéresse au mouvement du point matériel $\{M\}$ de masse $m = \text{cste}$ dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



En notant ℓ_1 la longueur du ressort 1, la longueur du ressort 2 est $L - \ell_1$ et les forces de rappel de ressorts s'expriment

- $\vec{F}_{H1} = -k_1(\ell_1 - \ell_{1,0})\vec{e}_x$;
- $\vec{F}_{H2} = k_2(\ell_2 - \ell_{2,0})\vec{e}_x = k_2(L - \ell_1 - \ell_{2,0})\vec{e}_x$.

Le mouvement se fait sur un plan horizontal : le poids et la réaction du support se compensent, on ne les considère pas dans la suite. Par ailleurs on néglige les frottements.

À l'équilibre, le PFS s'écrit

$$\vec{0} = \vec{F}_{H1} + \vec{F}_{H2},$$

soit, avec $L = \ell_{1,0} + \ell_{2,0}$ et en projetant selon \vec{e}_x

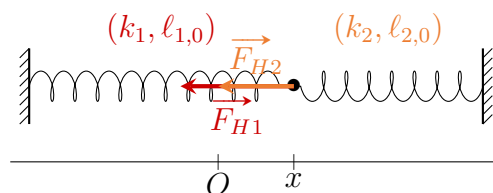
$$0 = -k_1(\ell_{1,\text{éq}} - \ell_{1,0}) + k_2(\ell_{1,0} - \ell_{1,\text{éq}}) \Leftrightarrow (k_1 + k_2)(\ell_{1,\text{éq}} - \ell_{1,0}) = 0.$$

La somme des constantes de raideurs est non nulle, d'où

$$\boxed{\ell_{1,\text{éq}} = \ell_{1,0}.}$$

À l'équilibre, les deux ressorts sont au repos.

- On reprend l'étude précédente, en plaçant l'origine de l'axe (Ox) au niveau de la position d'équilibre du système.



Avec ce choix de coordonnées, les forces de rappel deviennent :

- $\vec{F}_{H1} = -k_1 x \vec{e}_x$;
- $\vec{F}_{H2} = -k_2 x \vec{e}_x$.

Le PFD projeté selon (Ox) s'écrit :

$$m\ddot{x} = -k_1x - k_2x, \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}x = 0.}$$

3. On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$. Ce système est donc analogue à un système masse-ressort avec un unique ressort de constante de raideur

$$\boxed{k_{\text{éq}} = k_1 + k_2.}$$

Quand ils sont assemblés en parallèle, les constantes de raideurs des ressorts s'additionnent. *Il serait intéressant de montrer que deux ressorts montés en série sont équivalents à un unique ressort dont l'inverse de la constante de raideur vaut $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.*

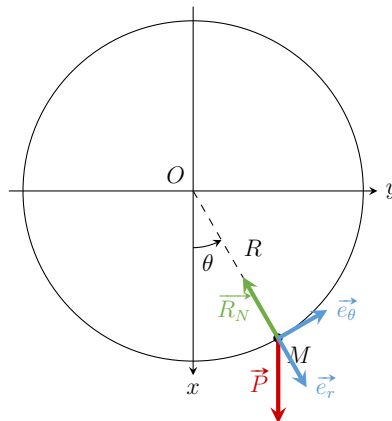
4. Pour $L \neq \ell_{1,0} + \ell_{2,0}$, la dynamique du mouvement est la même : le PFD s'écrit en effet de la même manière.

Seule la position d'équilibre change. On l'obtient à nouveau avec le PFS, qui donne

$$\boxed{\ell_{1,\text{éq}} = \frac{k_1\ell_{1,0} + k_2(L - \ell_{2,0})}{k_1 + k_2}.}$$

Exercice 7 – Chaussette dans un sèche-linge

1. On se place en coordonnées polaires, où l'angle θ est défini comme sur le schéma ci-dessous.



Le mouvement est circulaire uniforme, d'où

$$\boxed{\vec{a} = -R\omega^2\vec{e}_r,} \quad \text{avec} \quad \omega = \dot{\theta} = \frac{2\pi \times 50}{60} \approx 5,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. On s'intéresse au mouvement de la {chaussette} de masse $m = \text{cte}$ dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Elle est soumise au poids $\vec{P} = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$ et à la réaction du tambour \vec{R}_{tambour} . Le PFD s'écrit donc :

$$-mR\omega^2\vec{e}_r = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) + \vec{R}_{\text{tambour}},$$

d'où

$$\boxed{\vec{R}_{\text{tambour}} = -mR\omega^2\vec{e}_r - mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta).}$$

3. La réaction normale \vec{R}_N correspond à la composante de la réaction du tambour selon \vec{e}_r , d'où

$$\vec{R}_N = -mg \left(\frac{R}{g} \omega^2 + \cos \theta \right) \vec{e}_r.$$

$mg \neq 0$, donc la composante normale s'annule pour un angle θ_1 tel que

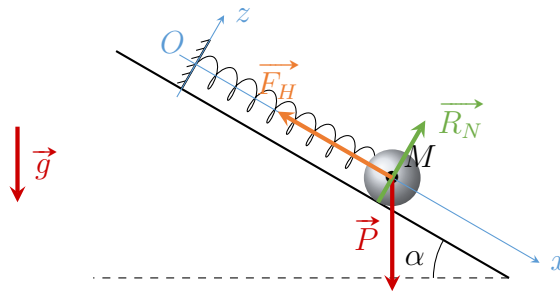
$$\theta_1 = \arccos \left(-\frac{R\omega^2}{g} \right).$$

A.N. : $\theta_1 \approx 134^\circ$.

4. La chaussette décolle de la paroi du tambour, la suite du mouvement est une chute libre dans le tambour : la chaussette suit une trajectoire parabolique jusqu'à retomber sur la paroi du tambour.

Exercice 8 – Oscillations sur un plan incliné

1. On s'intéresse au mouvement du point matériel $\{M\}$ de masse $m = \text{cste}$ dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



Le système est soumis à trois forces :

- son poids : $\vec{P} = mg(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_z)$;
- la force de rappel du ressort : $\vec{F}_H = -k(x - \ell_0) \vec{e}_x$;
- la réaction du support : $\vec{R} = R_N \vec{e}_z$.

À l'équilibre, le PFS s'écrit donc

$$\vec{0} = mg(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_z) - k(x_{\text{éq}} - \ell_0) \vec{e}_x + R_N \vec{e}_z,$$

d'où en utilisant sa projection selon \vec{e}_x :

$$x_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k} \sin \alpha.$$

On remarque que la position d'équilibre s'éloigne de ℓ_0 si :

- m est grande : une masse importante favorisera l'allongement du ressort ;
- α est grand ($\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$) : la composante du poids selon \vec{e}_x est alors plus importante ce qui agit à nouveau en faveur d'un allongement du ressort ;

- k est faible, c'est-à-dire que le ressort est « mou ».

Toutes ces dépendances sont raisonnables.

La projection selon \vec{e}_z indique que la réaction du support et l'autre composante du poids se compensent : cela reste vrai même lorsque le système est en mouvement car il n'y a pas de mouvement selon \vec{e}_z .

2. On reprend l'étude précédente en dynamique : la projection du PFD selon \vec{e}_x s'écrit

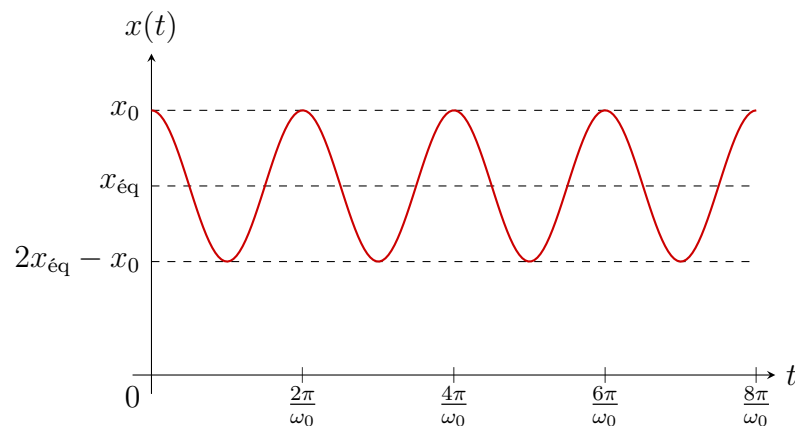
$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - k(x - \ell_0), \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}, \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.}$$

On reconnaît l'équation d'un OH de pulsation propre ω_0 .

3. Compte tenu des conditions initiales imposées, la résolution donne

$$\boxed{x(t) = (x_0 - x_{\text{éq}}) \cos(\omega_0 t) + x_{\text{éq}}.}$$

On représente l'évolution de $x(t)$ pour $x_0 > x_{\text{éq}}$.



4. On tient maintenant compte des frottements $\vec{f} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{x} \vec{e}_x$. Le PFD devient

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_H + \vec{R}_N + \vec{f}.$$

En projetant selon \vec{e}_x :

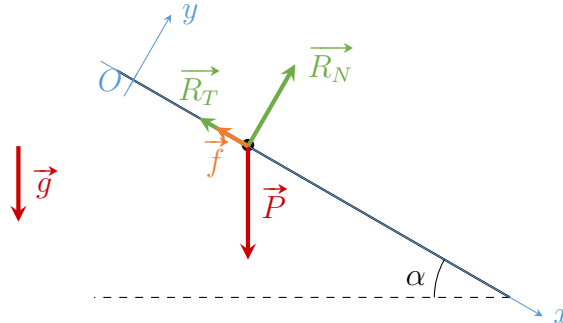
$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - k(x - \ell_0) - \lambda \dot{x}, \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}.}$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur amorti de pulsation propre ω_0 et de facteur de qualité $Q = \sqrt{km}/\lambda$. On peut distinguer plusieurs cas :

- $Q < 1/2 \Leftrightarrow \lambda > 2\sqrt{km}$: le régime transitoire est aperiodique ;
- $Q = 1/2 \Leftrightarrow \lambda = 2\sqrt{km}$: le régime transitoire est critique ;
- $Q > 1/2 \Leftrightarrow \lambda < 2\sqrt{km}$: le régime transitoire est pseudo-periodique.

Exercice 9 – Descente à ski

- On s'intéresse au mouvement du {skieur} de masse $m = \text{cste}$ dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



Le système est soumis à

- son poids $\vec{P} = mg(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y)$;
- la réaction de la piste $\vec{R}_N + \vec{R}_T = R_N \vec{e}_y - R_T \vec{e}_x$ avec R_N et R_T positifs ;
- les frottements de l'air $\vec{f} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{x} \vec{e}_x$.

Le mouvement se fait selon \vec{e}_x , donc $\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x$. Le PFD s'écrit

$$m \ddot{x} \vec{e}_x = mg(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y) + R_N \vec{e}_y - R_T \vec{e}_x - \lambda \dot{x} \vec{e}_x.$$

En projetant selon \vec{e}_y , on obtient directement

$$R_N = mg \cos \alpha \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{R}_N = mg \cos \alpha \vec{e}_y.}$$

- En projetant le PFD selon \vec{e}_x avec $\vec{R}_T = -\mu mg \cos \alpha \vec{e}_x$, on obtient

$$m \ddot{x} = mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \lambda \dot{x}.$$

En posant $v(t) = \dot{x}(t)$, on obtient une EDL1 vérifiée par la vitesse du skieur

$$m \dot{v} + \lambda v = mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

En régime permanent, on a $v(t) = v_\ell$ et l'équation donne

$$\boxed{v_\ell = \frac{mg}{\lambda}(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).}$$

A.N. : $v_\ell \approx 53 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 190 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Rq : Cette relation n'est valable que si $\sin \alpha > \mu \cos \alpha$, sinon la vitesse limite est négative, ce qui signifie que le skieur remonte la pente, alors que les expressions utilisées pour les forces de frottements lors de la projection du PFD ne sont valables que pour un skieur qui descend.

- On résout

$$\dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_\ell}{\tau}, \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{\lambda}.$$

On a $v(0) = 0$, d'où

$$\boxed{v(t) = v_\ell (1 - e^{-t/\tau}).}$$

4. On cherche l'instant t_1 tel que $v(t_1) = v_\ell/2$. En utilisant l'expression précédente, on obtient après calcul

$$t_1 = \tau \ln 2.$$

A.N. : $t_1 \approx 5,5$ s.

5. Lorsque le skieur a chuté, la projection du PFD selon \vec{e}_x devient

$$\dot{v} = g(\sin \alpha - 100\mu \cos \alpha).$$

On intègre en tenant compte de la condition initiale $v(t_1) = v_\ell/2$, d'où

$$v(t) = g(t - t_1)(\sin \alpha - 100\mu \cos \alpha) + \frac{v_\ell}{2} \quad \text{si } t \geq t_1 \text{ et } v(t) \geq 0.$$

On cherche l'instant $t_2 > t_1$ tel que $v(t_2) = 0$, on obtient

$$t_2 = t_1 - \frac{v_\ell}{2g(\sin \alpha - 100\mu \cos \alpha)}.$$

La distance d parcourue entre t_1 et t_2 est telle que

$$d = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt, \quad \text{soit, après calcul} \quad d = -\frac{v_\ell^2}{8g(\sin \alpha - 100\mu \cos \alpha)}.$$

A.N. : $d \approx 12,5$ m.

6. Par analyse dimensionnelle, on obtient

$$[K] = \text{M} \cdot \text{L}^{-3}.$$

Le coefficient K s'exprime dans le système international d'unité en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

7. En négligeant les frottements avec la piste et avec la nouvelle expression pour modéliser les frottements de l'air, la projection du PFD selon \vec{e}_x devient

$$m\dot{v} + \frac{KS}{2}v^2 = mg \sin \alpha.$$

En régime permanent, on a $v(t) = v'_\ell$ et l'équation donne

$$v'_\ell = \sqrt{\frac{2mg \sin \alpha}{KS}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}mg}{KS}}.$$

A.N. : $v'_\ell = 68 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 245 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

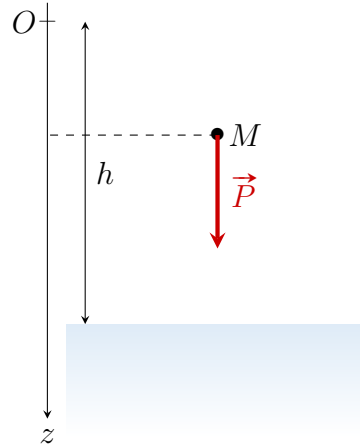
L'intensité de la réaction tangentielle qui modélise les frottements avec la piste ne dépend pas de la vitesse, elle vaut $R_T = mg\mu \sin \alpha = 28 \text{ N}$. Une fois la vitesse limite v'_ℓ atteinte, la force de frottement vaut $\|\vec{f}\| = KSv_\ell'^2/2 = 1,1 \text{ kN}$. On a donc

$$\frac{\|\vec{f}\|}{\|\vec{R}_T\|} \approx 40 \gg 1.$$

On peut donc négliger les frottements du skieur sur la piste par rapport aux frottements liés à l'air.

Exercice 10 – Jeux aquatiques

1. On s'intéresse au mouvement du {baigneur} de masse $m = \text{cste}$ dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



Le baigneur est en chute libre : il n'est soumis qu'à son poids $\vec{P} = mg\vec{e}_z$. Le mouvement est rectiligne selon \vec{e}_z , la projection du PFD sur le même axe s'écrit donc

$$m\ddot{z} = mg.$$

Avec $\dot{z}(0) = 0$ et $z(0) = 0$, on obtient

$$\dot{z}(t) = gt \quad \text{et} \quad z(t) = \frac{gt^2}{2}.$$

Le plongeur atteint la surface de l'eau à l'instant t_c tel que $z(t_c) = h$, d'où

$$\boxed{t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_e = \dot{z}(t_c) = \sqrt{2gh}}.$$

A.N. : $t_c = 1,4 \text{ s}$ et $v_e = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. Une fois dans l'eau, le PFD devient

$$m\ddot{x}\vec{e}_x = m\vec{g} \left(1 - \frac{1}{d_h}\right) - k\vec{v}.$$

Avec $\vec{v} = v_z\vec{e}_z$, on obtient une EDL1 en projetant le PFD selon \vec{e}_z

$$\boxed{\dot{v}_z + \frac{v_z}{\tau} = g \left(1 - \frac{1}{d_h}\right)}, \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{m}{k}}.$$

3. En reprenant l'origine des temps en $t = t_c$, avec la condition initiale $v_z(0) = v_e$, on obtient

$$\boxed{v_z(t) = (v_e - v_L)e^{-t/\tau} + v_L}, \quad \text{avec} \quad v_L = \frac{mg}{k} \left(1 - \frac{1}{d_h}\right).$$

4. En régime permanent, la vitesse limite est

$$v_L = \frac{mg}{k} \left(1 - \frac{1}{d_h} \right).$$

A.N. : $v_L = -36 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

5. Puisque $v_L < 0$, on a $|v_L| = -v_L$, d'où

$$v_z(t) = (v_e + |v_L|) e^{-t/\tau} - |v_L|.$$

L'instant t_1 est tel que $v_z(t_1) = 0$, d'où

$$t_1 = \tau \ln \left(1 + \frac{v_e}{|v_L|} \right).$$

A.N. : $t_1 \approx 1,2 \text{ s}$.

6. On intègre l'expression de la vitesse obtenue, d'où

$$z(t) = -\tau (v_e + |v_L|) e^{-t/\tau} - |v_L|t + \text{cste}.$$

Avec les conditions initiales

$$z(0) \underset{\text{sol}^\circ}{=} -\tau (v_e + |v_L|) + \text{cste} \underset{\text{CI}}{=} 0,$$

d'où

$$z(t) = \tau (v_e + |v_L|) (1 - e^{-t/\tau}) - |v_L|t.$$

La profondeur maximale est atteinte à l'instant t_1 , d'où

$$z_{\max} = z(t_1) = \tau \left(v_e - |v_L| \ln \left(1 + \frac{v_e}{|v_L|} \right) \right).$$

A.N. : $z_{\max} \approx 4,1 \text{ m}$.

7. On cherche l'instant t_2 tel que $v_z(t_2) = v_2$. On obtient après calculs

$$t_2 = \tau \ln \left(\frac{v_e + |v_L|}{v_2 + |v_L|} \right).$$

A.N. : $t_2 \approx 0,76 \text{ s}$ et $z_{\min} = z(t_2) \approx 3,9 \text{ m}$.

Exercice 11 – Parabole de sûreté

1. $y(x) = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha$

2. $d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. d est maximale pour $\alpha = 45^\circ$.

3. $y_{\max} = y\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$.

4. $y = -\frac{x^2}{4h} - \frac{x^2}{4h} \tan^2 \alpha + x \tan \alpha$, h correspondant à la hauteur maximale à laquelle il est possible d'envoyer le projectile pour une vitesse donnée, c'est-à-dire pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

5. Les points de coordonnées (x, y) sont situés sous la parabole de sûreté, d'équation $y = h - \frac{x^2}{4h}$.