TD M3 – Énergie mécanique

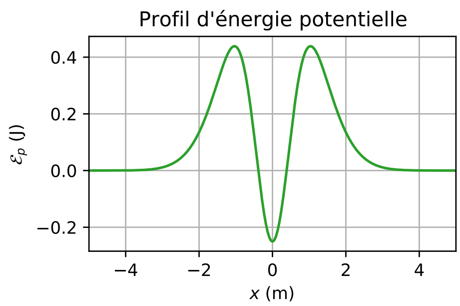
★☆☆ Exercice 1 – Sauvetage en montagne

Deux alpinistes coincés sur une paroi rocheuse sont hélitreuillés. L'hélicoptère se tient en vol stationnaire à une hauteur $H = 20\,\mathrm{m}$ des alpinistes. Le treuil remonte les deux alpinistes à une vitesse constante $v_0 = 20\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Le filin, qui remonte les deux alpinistes assimilés à un point matériel de masse $m = 170\,\mathrm{kg}$, est inextensible et de masse négligeable. On s'intéresse à l'énergie dépensée pour hélitreuiller les alpinistes depuis leur position initiale jusqu'à l'hélicoptère. On néglige tout frottement.

1. Calculer la puissance $\mathcal{P}$ dépensée par le treuil au cours de la manœuvre de sauvetage.
2. Calculer l'énergie fournie par le treuil pour remonter les alpinistes.

★☆☆ Exercice 2 – Profil d'énergie potentielle

On considère un point matériel M de masse $m = 500\,\mathrm{g}$, astreint à se déplacer le long d'un axe (Ox). Il est soumis à des forces conservatives dont la résultante est associée au profil d'énergie potentielle $\mathcal{E}_\mathrm{p}(x)$ représenté ci-dessous (la référence d'énergie potentielle est choisie nulle à l'infini). On néglige tous les frottements.



1. Déterminer les positions d'équilibre ainsi que leur stabilité. Peut-on choisir une vitesse v_0 pour que le point M initialement loin de $x = 0$ finisse piégé au voisinage de $x = 0$?
2. Le point M est initialement en $x = 0$. Déterminer la vitesse v_1 correspondant à la plus grande vitesse initiale pour laquelle le mouvement correspond à un état lié. Déterminer l'amplitude x_1 des oscillations de M pour $\mathcal{E}_\mathrm{m} = 0{,}3\,\mathrm{J}$.
3. Le point M est initialement en $x = -5\,\mathrm{m}$ et possède une énergie mécanique $\mathcal{E}_\mathrm{m} = 0{,}3\,\mathrm{J}$. Déterminer sa vitesse initiale v_2 (on suppose $v_2 > 0$), la position maximale x_2 qu'il atteint et décrire son mouvement.
4. Déterminer la vitesse minimale v_3 à lui communiquer pour passer de $x = -\infty$ à $x = +\infty$. Calculer alors sa vitesse v_4 au fond du puits.
5. Vérifier vos réponses avec le programme `tdM3-profil_energie_potentielle.py`.

★☆☆ Exercice 3 – Chapeau mexicain

On considère un système soumis à des forces qui dérivent d'une énergie potentielle

$$\mathcal{E}_\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{\lambda}{24}x^4, \quad \text{avec} \quad k > 0.$$

1. Tracer cette fonction pour λ positif ou négatif.
2. Étudier ses positions d'équilibre et leur stabilité.

★☆☆ Exercice 4 – Carabine à ressort

Un cylindre est incliné vers le haut de 60° par rapport à l'horizontale. Un ressort de masse négligeable, de raideur $k = 400\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$, est fixé au fond du cylindre, et est comprimé de $\Delta L = 10\,\mathrm{cm}$ par rapport à sa longueur au repos. Une balle de masse $m = 20\,\mathrm{g}$ est posée dans le cylindre au-dessus du ressort.

On relâche le ressort, la balle est éjectée. On néglige toute forme de frottements.

1. Exprimer, puis calculer la vitesse à laquelle est éjectée la balle.
2. Exprimer, puis calculer la vitesse de la balle quand elle a atteint sa hauteur h maximale.
3. Exprimer, puis calculer la hauteur h.

★★☆ Exercice 5 – Calcul de travaux

Dans le plan, on considère une force dont la position dépend du point (x, y) selon la relation

$$\vec{F}(x,y) = \alpha(y^2 - x^2)\vec{e_x} + 3\alpha xy\vec{e_y}.$$

On considère les quatre points $O(0,0)$, $A(p,0)$, $B(0,p)$, $C(p,p)$ formant un carré de coté p. Tous les trajets étudiés se font en ligne droite entre les points considérés.

1. Calculer le travail W_{OAC} de $\vec{F}$ lorsque le point M suit le trajet $O \to A \to C$.
2. Même question pour le travail W_{OBC} si le déplacement se fait selon $O \to B \to C$.
3. Même question pour W_{OC} si l'on va de O à C en ligne droite.
4. Conclure sur la nature conservative de $\vec{F}$ ou non.

★★☆ Exercice 6 – Étude d'une force

Une particule de masse m astreinte à se déplacer sur un axe $(O, \vec{e_r})$ est soumise à la force :

$$\vec{F}(r) = \left(-kr + \frac{a}{r^2}\right)\vec{e_r}, \quad \text{avec} \quad a, k > 0.$$

1. Commenter l'expression de $\vec{F}$.
2. Existe-t-il une position d'équilibre ? Si oui, quelle est-elle ?
3. Montrer que la force $\vec{F}$ est conservative.
4. Représenter $\mathcal{E}_\mathrm{p}(r)$ et commenter. Préciser la stabilité de la position d'équilibre déterminée précédemment.
5. Déterminer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre.

★★☆ Exercice 7 – Distance de freinage

Une voiture de masse $m = 1{,}5 \times 10^3\,\mathrm{kg}$ roule à la vitesse de $50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ sur une route horizontale. Devant un imprévu, le conducteur écrase la pédale de frein et s'arrête sur une distance $d = 15\,\mathrm{m}$. On modélise la force de freinage par une force constante opposée à la vitesse.

1. Calculer le travail de la force de freinage.

2. En déduire la norme de cette force.
3. Quelle distance faut-il pour s'arrêter si la vitesse initiale est de $70\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$?
4. Commenter cette phrase relevée dans un livret d'apprentissage de la conduite : « La distance de freinage est proportionnelle au carré de la vitesse ».

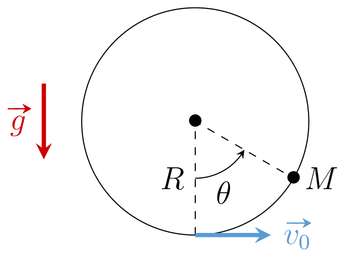
★★☆ Exercice 8 – Masse doublement retenue

Une masse m est retenue de part et d'autre par deux ressorts (k_1, ℓ_0) et (k_2, ℓ_0). Le ressort 1 est fixé au mur gauche, le ressort 2 est fixé au mur droit distant de $d > 2\ell_0$ de celui de gauche. On repère la position de la masse par sa coordonnée x repérée à partir du mur de gauche et orienté selon les x croissants par le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_x}$.

1. Établir l'expression de l'énergie potentielle totale du système en fonction de x. Tracer le profil d'énergie potentielle associé.
2. Établir l'expression de la position de la masse à l'équilibre $x_{\text{éq}}$. Commenter.
3. Commenter la stabilité de cette position d'équilibre.
4. Obtenir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
5. Résoudre cette équation dans le cas où la masse m est lancée depuis sa position d'équilibre avec une vitesse v_0.

★★☆ Exercice 9 – Mouvement sur un cercle

Une bille de masse m peut se déplacer sans frottement sur la surface intérieure d'un support circulaire vertical de rayon R. On la lance avec la vitesse horizontale $\overrightarrow{v_0}$ au point le plus bas du cercle.



1. En utilisant un théorème énergétique, établir l'équation du mouvement de M.
2. Montrer que la norme de la force de réaction du support circulaire vaut

$$N = m\left[\frac{v_0^2}{R} + g(3\cos\theta - 2)\right].$$

3. Montrer que la bille reste en contact avec le support lors de tout le mouvement lorsque la vitesse initiale v_0 est supérieure à une vitesse v_{min} à déterminer.
4. Supposons $v_0 < v_{\text{min}}$. Déterminer l'angle θ_0 auquel la bille quitte le support et tombe.

★★☆ Exercice 10 – Navire à moteur

Un navire, de masse $m = 10\,000$ tonnes, file en ligne droite, à la vitesse $v_0 = 15$ nœuds. La force de résistance exercée par l'eau sur la coque du bateau est du type $F = kv^2$, où k est une constante et v la vitesse du bateau.

Un nœud correspond à 1 mille nautique par heure et le nautique est égal à 1852 m.

On se place dans un référentiel lié au port qui sera supposé galiléen.

1. Calculer la constante k sachant que le moteur fournit une puissance $\mathcal{P} = 5\,\mathrm{MW}$ à la vitesse v_0.
2. Le navire stoppe ses machines à la distance X au large de la passe d'entrée d'un port. Déterminer l'expression de la vitesse du navire en fonction du temps t. On posera $L = m/k$.
3. En déduire la distance X parcourue par le navire en fonction de L, v_0 et v_P la vitesse au niveau de la passe. Calculer cette distance si on désire atteindre la passe à la vitesse de 2 nœuds.
4. Déterminer le temps t_P mis pour atteindre la passe.
5. Déterminer la vitesse v_Q à l'arrivée du quai, un demi-mille au-delà de la passe d'entrée. On la calculera en nœuds puis en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
6. Quelle est la solution d'urgence pour arrêter le bateau ?

★★☆ Exercice 11 – Interactions entre atomes

L'énergie potentielle associée à la force d'interaction entre les deux atomes d'une molécule diatomique peut être approchée par le potentiel de Lennard-Jones, de la forme

$$\mathcal{E}_\mathrm{p}(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}, \quad \text{avec} \quad a, b > 0,$$

où x est la distance interatomique.

1. Donner l'expression de la force $\vec{F}(x)$ s'exerçant entre ces deux atomes.
2. Les deux atomes sont de masse M et $m \ll M$. On suppose alors que l'atome de masse M reste immobile en un point O, tandis que l'autre se déplace sur l'axe (Ox). Discuter qualitativement des mouvements possibles.
3. Déterminer la distance d'équilibre x_0 entre les deux noyaux. Cette position est-elle stable ?
4. Montrer que pour x proche de x_0, on peut écrire $F(x) = F(x_0 + \varepsilon) = -k\varepsilon$, et donner l'expression de k. En déduire l'expression de la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre.

★★★ Exercice 12 – Oscillateur anharmonique

On considère un point de masse m astreint à se déplacement sans frottement le long de l'axe horizontal (Ox). Il est fixé à l'extrémité libre d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, dont l'autre extrémité est fixée en un point A de l'axe vertical OA, tel que $OA = \ell_0$.

1. Donner l'expression de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_\mathrm{p}(x)$ de M.
2. En déduire l'expression approchée de cette énergie lorsque $x \ll \ell_0$.
3. Quelle est la position d'équilibre de M ? Est-elle stable ? Le mouvement de M est-il périodique ? Harmonique ?
4. On lâche avec une vitesse initiale nulle le point M depuis la position $x = a$ avec $0 < a \ll \ell_0$. Comment varie la période du mouvement en fonction de l'amplitude a ?
   On donne l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}} \approx 1{,}31$.

Coups de pouce

Pour tous les exercices où l'application d'un théorème énergétique est nécessaire, la méthode mise en œuvre dans le chapitre précédent est de rigueur : système, référentiel, etc... L'expression des forces n'est pas toujours nécessaire, mais il faut identifier rapidement celles qui travaillent ou non, qui sont conservatives et exprimer dans ce cas l'énergie potentielle associée.

Ex. 1 1. Attention au signe !

Ex. 3 1. En cas de doute, Python est ton ami ! 2. Cf. cours : que dire des dérivées spatiales de $\mathcal{E}_\mathrm{p}$ au niveau d'une position d'équilibre ?

Ex. 4 2. Quelle est la nature du mouvement de la balle une fois éjectée ? Que peut-on en déduire sur la composante horizontale de sa vitesse ?

Ex. 5 1. Sur le trajet $O \to A$, $y = 0 = \text{cste}$: quelle est alors l'expression de $\overrightarrow{F}$? Et sur le trajet $A \to C$? 3. Sur le trajet $O \to C$, $x = y$ et donc $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$.

Ex. 6 3. Trouver $\mathcal{E}_\mathrm{p}(r)$! 5. Retrouver l'équation d'un OH à l'aide d'un DL.

Ex. 7 1. Aie foi en le TEC !

Ex. 8 Utilisation de théorèmes énergétiques sur un problème analogue à l'Ex. 6 du TD M2. 4. Reconnaitre un mouvement conservatif : que peut-on dire de $\mathcal{E}_\mathrm{m}$, et donc de $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t}$?

Ex. 9 1. Justifier que le mouvement est conservatif. 2. Utiliser le PFD. 3. Problème semblable à l'igloo.

Ex. 10 2. M1 : $-\dot{v}/v^2$ est la dérivée d'une fonction connue ; M2 : Séparer les variables v et t dans l'équation pour reconnaitre une dérivée connue : placer v et $\mathrm{d}v$ d'un côté du signe $=$, $\mathrm{d}t$ de l'autre.

Ex. 12 2. $(1+\varepsilon)^n \approx 1+n\varepsilon$ quand $\varepsilon \ll 1$. 3. $\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right|_0 = 0$... Reprendre le raisonnement sur la force associée à ce potentiel, en poussant le DL au premier ordre non nul. 4. Quelle durée faut-il pour passer de a à 0 ? Utiliser la séparation de variables.

✓ Éléments de correction

Ex. 1 1. $\mathcal{P} = mgv_0 > 0 \approx 0{,}33\,\mathrm{kW}$; 2. $\mathcal{E} = mgH \approx 33\,\mathrm{kJ}$.

Ex. 2 1. $x_\text{éq} = 0$: stable, $x_\text{éq} \approx \pm 1\,\mathrm{m}$: instable ; 2. $v_1 \approx 1{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $x_1 \approx 0{,}7\,\mathrm{m}$; 3. $v_2 \approx 1{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $x_2 \approx -1{,}5\,\mathrm{m}$; 4. $v_3 \approx 1{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_4 = v_1$.

Ex. 3 2. $\lambda > 0 : x = 0$ stable ; $\lambda < 0 : x = 0$ stable, $x = \pm\sqrt{-6k/\lambda}$ instable.

Ex. 4 1. $v_0 = \sqrt{\Delta L\left(\frac{k\Delta L}{m} - \sqrt{3}g\right)} \approx \Delta L\sqrt{k/m} \approx 14\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; 2. $v_h = v_0/2 \approx 7{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; 3. $h = \frac{3v_0^2}{8g} \approx 7{,}6\,\mathrm{m}$.

Ex. 5 1. $W_{OAC} = 7\alpha p^3/6$; 2. $W_{OBC} = 2\alpha p^3/3$; 3. $W_{OC} = \alpha p^3$.

Ex. 6 2. $r_\text{éq} = (a/k)^{\frac{1}{3}}$; 3. $\mathcal{E}_\mathrm{p}(r) = kr^2/2 + a/r$; 5. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$.

Ex. 7 1. $W = -mv^2/2 \approx -0{,}14\,\mathrm{MJ}$; 2. $F = -W/d = 9{,}6\,\mathrm{kN}$; 3. $d' = dv'^2/v^2 \approx 2d$.

Ex. 8 1. $\mathcal{E}_\mathrm{p}(x) = k_1(x-\ell_0)^2/2 + k_2(d - x - \ell_0)^2/2$; 2. $x_\text{éq} = \frac{k_2 d + (k_1-k_2)\ell_0}{k_1+k_2}$; 3. stable ; 4. $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_\text{éq}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$; 5. $x(t) = x_\text{éq} + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$.

Ex. 9 1. $\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$; 3. $v_0 > v_\text{min} = \sqrt{5gR}$; 4. $\theta_0 = \arccos\left(\frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3gR}\right)$.

Ex. 10 1. $k = \mathcal{P}/v_0^3 \approx 11\times 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$; 2. $v(t) = \frac{v_0 L}{v_0 t + L}$; 3. $X = L\ln(v_0/v_P) \approx 1\,\text{mille}$; 4. $t_P = L\left(\frac{1}{v_P} - \frac{1}{v_0}\right) \approx 773\,\mathrm{s}$; 5. $v_Q = v_P e^{-d/L} \approx 0{,}73\,\text{nœud}$.

Ex. 11 1. $\overrightarrow{F}(x) = \left(-\frac{6a}{x^7} + \frac{12b}{x^{13}}\right)\overrightarrow{e_x}$; 3. $x_0 = \left(\frac{2b}{a}\right)^{\frac{1}{6}}$, stable ; 4. $k = 18\frac{a^2}{b}\left(\frac{a}{2b}\right)^{\frac{1}{3}}$, $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Ex. 12 1. $\mathcal{E}_\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{\ell_0^2 + x^2} - \ell_0\right)^2$; 2. $\mathcal{E}_\mathrm{p}(x) \approx \frac{kx^4}{8\ell_0^2}$; 3. $x = 0$, stable ; 4. $T = \frac{8I\ell_0}{a}\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Exercice 13 – Résolution de problème

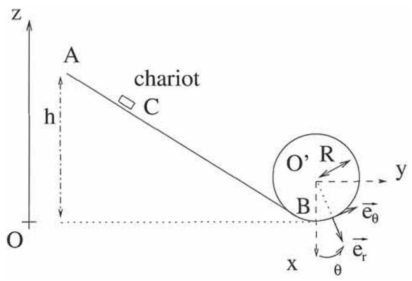
Un remonte-pente est constitué d'un câble auquel les skieurs s'accrochent à l'aide d'une perche pour remonter.

Données : longueur du câble $200\,\mathrm{m}$ *; distance entre deux perches :* $5\,\mathrm{m}$ *; dénivelé :* $25\,\mathrm{m}$ *; vitesse du câble* $5\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ *; coefficient de frottement :* $f \approx 0{,}1$.

Déterminer la puissance du moteur qui entraine le câble.

Indication : On peut modéliser les frottements avec la neige par une réaction tangentielle $\overrightarrow{R_T}$*, opposée au sens du mouvement et liée à la réaction normale* $\overrightarrow{R_N}$ *par* $R_T = fR_N$*, où* f *est le coefficient de frottement.*

Exercice 14 – Chariot de parc d'attraction – Oral banque PT



On étudie numériquement la trajectoire d'un chariot de parc d'attraction, de masse $m = 10$ tonnes. Ce chariot part du point A, descend le long d'un plan incliné et entre ensuite dans un looping haut de 40 m, où l'on suppose qu'il peut parcourir plusieurs tours.

Les courbes ci-dessous représentent l'évolution au cours du temps de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$, de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$, de l'énergie mécanique totale $\mathcal{E}_m$ et de l'évolution de la réaction normale R_N du looping sur le chariot.

Donnée : $g \approx 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

1. Associer à chaque courbe la grandeur représentée. La simulation prend-t-elle en compte des frottements et autres sources de dissipation ?
2. Calculer la hauteur h et la vitesse initiale V_0 du chariot, ainsi que la vitesse V_{max} qu'il atteint.
3. À quelle date le chariot quitte-t-il le looping ?
4. Combien de tours entiers effectue le chariot avant de se décoller du looping ?
5. Quelle hauteur initiale faudrait-il donner au chariot afin qu'il ne se décolle pas ?