TP11 – Pendule non-linéaire

En dépit de son nom, le pendule simple ne présente pas de solution analytique simple en dehors de l'approximation des petits angles. En effet, l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ est **non-linéaire**, ce qui complique sa résolution.

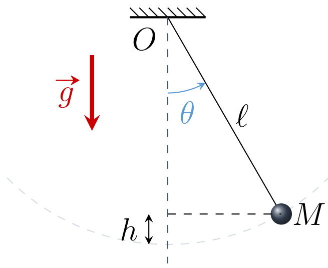
On se propose ici d'étudier le comportement du pendule en dehors de l'approximation des petits angles à l'aide d'une simulation numérique en utilisant la fonction `odeint` dont la documentation est rappelée ci-dessous.

Objectifs

- → Transformer une équation différentielle d'ordre n en un système différentiel de n équations d'ordre 1.
- → Utiliser la fonction `odeint` de la bibliothèque `scipy.integrate` (sa spécification étant fournie).
- → **À l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non-linéaire et faire apparaître l'effet des termes non-linéaires.**

Position du problème

On s'intéresse au mouvement d'une masse m assimilée à son centre de masse M, suspendue à un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable. L'autre extrémité du fil est fixée au point O, origine du repère. L'étude est réalisée dans le référentiel terrestre considéré galiléen.



Document 1 – Fonction odeint

`scipy.integrate.odeint(F, V0, t)` : intègre un système d'équations différentielles du premier ordre de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = F(V,t), \text{ où } V = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Paramètres :

`F` : fonction qui calcule la dérivée de V en t ;

`V0` : conditions initiales sur V ;

`t` : liste des instants auxquels est calculé V.

Renvoie :

`V` : tableau contenant `len(t)` vecteurs V, calculés aux instants de `t`.

Les réponses s'appuieront sur le notebook `7e17-1133968` accessible depuis l'ENT sur Capytale. Dans toute la suite, la notation θ (dans le texte) ou `theta` (dans le programme) fait référence à l'angle utilisé pour repérer le point M dans le système de coordonnées polaires et $\omega = \dot{\theta}$ ou `omega` à sa vitesse angulaire.

1. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0, \tag{1}$$

Que devient cette équation pour $\theta \ll 1$?

Échauffement

On s'intéresse tout d'abord à l'équation différentielle associée au pendule simple pour des oscillations de faible amplitude, où l'on retrouve l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0.$$

Le point M est lâché avec une vitesse initiale nulle depuis un angle θ_0.

2. Modifier le programme pour donner un titre pertinent au graphique et à ses axes.

3. Indiquer la signification physique de chacune des valeurs de la liste `V0`.

4. Déterminer graphiquement la période T_0 des oscillations. Commenter.

5. Modifier la valeur initiale θ_0 de l'angle θ et commenter l'évolution de la période des oscillations. Était-ce prévisible ? Justifier.

Isochronisme ?

On s'intéresse maintenant à l'équation complète du pendule (Éq. (1)).

6. En posant $x = \theta$ et $y = \omega$, exprimer $\dot{x}$ et $\dot{y}$ en fonction de x et y. Compléter la fonction `pendule` associée à l'équation différentielle du pendule qui permettra de calculer numériquement $\theta(t)$ avec la fonction `odeint`.

7. Représenter sur un même graphique l'évolution de l'angle θ dans le cas du pendule simple et de l'oscillateur harmonique pour $\theta_0 = 0{,}1$ et $\omega_0 = 0$. Que remarque-t-on pour des oscillations d'amplitude plus importante ? Interpréter.

8. Dans une nouvelle fenêtre, comparer l'évolution de $\theta(t)$ pour $\theta_0 = \pi$ et $\omega_0 = 0{,}1$ dans le cas de l'oscillateur harmonique et du pendule. Interpréter en décrivant l'évolution du pendule simple dans ce cas.

Formule de Borda

9. On revient à $\omega_0 = 0$. Mesurer la période T des oscillations du pendule simple pour quelques valeurs de $\theta_0 \in]0, \pi[$. [1]

1. Les plus aventureux pourront automatiser cette mesure pour relever un grand nombre de points. Pour cela, on peut remarquer que les valeurs discrètes $\theta(t_k)$ et $\theta(t_{k+1})$ sont de signes opposés autour des instants où $\theta(t)$ passe par 0. Autrement dit, le produit $\theta_k\theta_{k+1}$ est négatif autour de ces points.

10. La formule de Borda permet d'approcher la période T du pendule en fonction de l'amplitude des oscillations θ_0 :

$$T(\theta_0) \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right), \quad \text{avec} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Écrire la fonction `borda(theta0)` qui renvoie la période approchée du pendule simple en fonction de l'amplitude des oscillations. Représenter sur un même graphe les mesures réalisées (Q. 9) et les valeurs calculées avec cette formule. Commenter.[2] [3]

Énergie mécanique

On rappelle que l'énergie cinétique d'un point matériel de masse m et de vitesse v est définit par $\mathcal{E}_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mv^2$. Par ailleurs, on définit l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_\mathrm{p} = mgh$, où h est la hauteur du point matériel M par rapport à sa position d'équilibre stable (cf. schéma). Finalement, on définit l'énergie mécanique $\mathcal{E}_\mathrm{m}$ du pendule comme la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle : $\mathcal{E}_\mathrm{m} = \mathcal{E}_\mathrm{c} + \mathcal{E}_\mathrm{p}$.

11. Exprimer les énergies cinétique $\mathcal{E}_\mathrm{c}$, potentielle $\mathcal{E}_\mathrm{p}$ et mécanique $\mathcal{E}_\mathrm{m}$ en fonction de m, ℓ, g, θ et/ou ω. Écrire les fonctions `energie_cinetique(omega)`, `energie_potentielle(theta)` et `energie_mecanique(theta, omega)` associées à ces énergies. Dans une nouvelle fenêtre et sur le même graphe, représenter $\mathcal{E}_\mathrm{c}(t)$, $\mathcal{E}_\mathrm{p}(t)$ et $\mathcal{E}_\mathrm{m}(t)$ dans le cas du pendule simple.

12. En l'absence de frottement, le point M n'est soumis qu'à une force conservative (le poids) et une force qui ne travaille pas (la tension du fil) : c'est un mouvement conservatif : commenter.

13. Écrire la fonction `pendule_amorti` à partir de la fonction `pendule` pour prendre en compte des frottements fluides de la forme $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$ avec $\lambda > 0$. Commenter alors l'évolution de $\mathcal{E}_\mathrm{m}(t)$.

2. Le calcul numérique « exact » de la période est possible !
3. En poursuivant le calcul de la période à l'ordre non nul suivant, on obtient

$$T(\theta_0) \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{11\theta_0^4}{3072}\right).$$