TD M3 – Énergie mécanique
Correction

Exercice 1 – Sauvetage en montagne

1. On considère le système treuil + filin soumis à la tension du fil au niveau du point d'attache $\vec{T}$ (et à la réaction du support au niveau du point d'ancrage du treuil dans l'hélicoptère) dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié à l'hélicoptère, supposé galiléen. La puissance reçue par le treuil, associée à $\vec{T}$, est donnée par $-v_0 T$.
   Par ailleurs, le PFD appliqué aux alpinistes animé d'un mouvement rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}$ et le principe des actions réciproques donne $T = mg$.
   En l'absence de frottement, la puissance dépensée par le treuil est l'opposé de la puissance qu'il reçoit, soit finalement
   $$\boxed{\mathcal{P} = mgv_0 > 0.}$$
   A.N. : $\mathcal{P} = 0{,}33\,\mathrm{kW}$.
2. Le treuil fonctionne pendant une durée H/v_0, d'où
   $$\boxed{\mathcal{E} = mgH.}$$
   Il s'agit sans surprise de la variation d'énergie potentielle de pesanteur des alpinistes.
   A.N. : $\mathcal{E} = 33\,\mathrm{kJ}$.

Exercice 2 – Profil d'énergie potentielle

1. Les positions d'équilibre sont données par les extrema de la courbe d'énergie potentielle. Il y en a trois :
   - $x = 0$ correspond à un minimum d'énergie potentielle, c'est une position d'équilibre stable ;
   - $x \approx \pm 1\,\mathrm{m}$ correspondent à des maxima d'énergie potentielle, ce sont des potions d'équilibre instables.

   Une telle vitesse v_0 n'existe pas : puisqu'il n'y a pas de frottements, $\mathcal{E}_\mathrm{m}$ est conservée. Si le système peut franchir l'un des maxima d'énergie potentielle, il franchira nécessairement le deuxième : il est alors dans un **état libre**.
2. La profondeur du puits est $\mathcal{E}_0 \approx 0{,}7\,\mathrm{J}$. Pour que le système soit dans un état lié, on veut que son énergie mécanique reste inférieure au maximum d'énergie potentielle, c'est-à-dire que son énergie cinétique au fond du puits soit inférieure à $\mathcal{E}_0$, soit
   $$\frac{1}{2}mv^2 < \mathcal{E}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{v < v_1 = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0}{m}}.}$$
   A.N. : $v_1 \approx 1{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.
   Pour trouver l'amplitude des oscillations, on cherche les abscisses des points d'intersection entre la droite $\mathcal{E}_\mathrm{m} = 0{,}3\,\mathrm{J}$ et la courbe d'énergie potentielle. Dans le puits, on trouve $x \approx \pm 0{,}7\,\mathrm{m}$: l'amplitude des oscillations est $\approx 0{,}7\,\mathrm{m}$.

3. En $x = -5\,\text{m}$, $\mathcal{E}_\text{p} \approx 0$, donc

$$\mathcal{E}_\text{m} = \mathcal{E}_\text{c} = \frac{1}{2} m v_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_\text{m}}{m}}.}$$

A.N. : $v_2 \approx 1{,}1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
La position maximale atteinte est donnée par l'intersection entre la droite $\mathcal{E}_\text{m} = 0{,}3\,\text{J}$ et la courbe d'énergie potentielle à gauche du puits. Graphiquement, on lit $x_2 \approx -1{,}5\,\text{m}$.
Le point matériel M avance dans le sens des x croissants en ralentissant jusqu'en $x = x_2$ où il s'arrête, avant de repartir dans le sens des x décroissants jusqu'en $-\infty$.

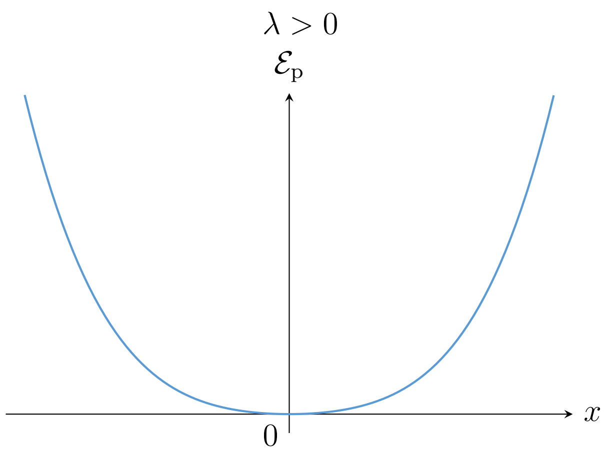
4. Pour passer de $x = -\infty$ à $x = +\infty$, il lui faut une énergie mécanique supérieure au maximum $\mathcal{E}_\text{max} \sim 0{,}45\,\text{J}$ d'énergie potentielle. En $-\infty$, son énergie potentielle est nulle, d'où pour obtenir un état de diffusion

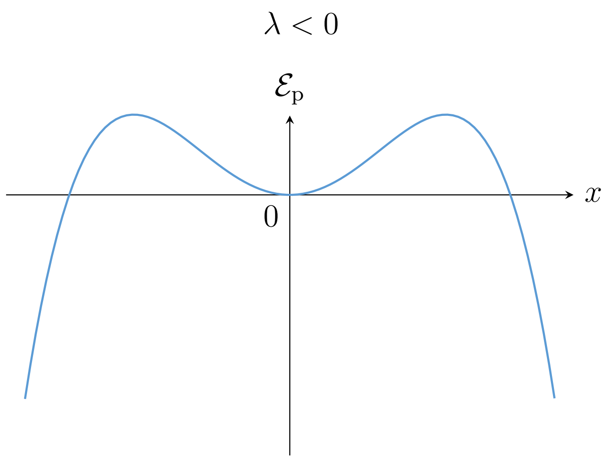
$$\mathcal{E}_\text{c} > \mathcal{E}_\text{max} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v > v_3 = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_\text{max}}{m}}.}$$

A.N. : $v_3 \approx 1{,}3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
Avec une vitesse initiale v_3, le système arrive au maximum d'énergie potentielle avec une vitesse nulle : au fond du puits, on a $v_4 = v_1$.

Exercice 3 – Chapeau mexicain

1. On trace la courbe d'énergie potentielle dans les deux cas :





2. On calcule les **dérivées spatiales** de l'énergie potentielle.

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\text{p}}{\mathrm{d}x} = kx + \frac{\lambda}{6}x^3 = x\left(k + \frac{\lambda}{6}x^2\right) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_\text{p}}{\mathrm{d}x^2} = k + \frac{\lambda}{2}x^2.$$

La position $x = 0$ correspond toujours à un extremum d'énergie potentielle car

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\text{p}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0.$$

Il s'agit toujours d'un minimum car

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} = k > 0.$$

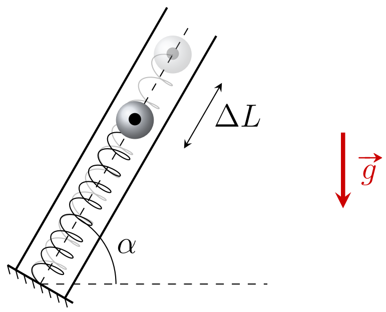
Si $\lambda > 0$ c'est la seule car $k + \lambda x^2/6 > 0$.
Si $\lambda < 0$, il en existe deux autres, données par $k + \lambda x^2/6 = 0$, soit $x_\pm = \pm\sqrt{-6k/\lambda}$. On évalue la dérivée seconde en ces points :

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_\pm} = -2k < 0,$$

il s'agit de maxima.
Finalement, on a **une seule position d'équilibre stable $x = 0$ si $\lambda > 0$**, et trois positions d'équilibre si $\lambda < 0$, **l'une stable en $x = 0$ et deux instables en $x = \pm\sqrt{-6k/\lambda}$**.
Ces résultats sont confirmés par l'allure des courbes obtenues précédemment.

Exercice 4 – Carabine à ressort

1. On considère le système {balle} dans le référentiel terrestre supposé galiléen, soumis à son poids et à la force de rappel du ressort qui sont des forces conservatives (ainsi qu'aux réactions normales du cylindre qui ne travaillent pas). On néglige les frottements.



À l'instant initial, le ressort est comprimé de ΔL et la vitesse de la balle est nulle, d'où

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m},i} = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2.$$

À l'instant final, le ressort est au repos et la vitesse de la balle vaut v_0, la balle s'est élevée de $\Delta L \sin\alpha$, d'où

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m},f} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mg\Delta L \sin\alpha$$

Les forces subies par le système sont conservatives ou ne travaillent pas donc le mouvement est conservatif : le TEM s'écrit

$$\Delta\mathcal{E}_\mathrm{m} = 0 = mg\Delta L \sin\alpha + \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}k(\Delta L)^2$$

d'où

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\Delta L\left(\frac{k\Delta L}{m} - 2g\sin\alpha\right)} = \sqrt{\Delta L\left(\frac{k\Delta L}{m} - \sqrt{3}g\right)}.}$$

A.N. : $v_0 \approx 14\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.
Rq : L'application numérique montre que la variation d'énergie potentielle de pesanteur est négligeable devant la variation d'énergie potentielle élastique, d'où

$$v_0 \approx \Delta L\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

2. Une fois éjectée, la balle est en chute libre : la composante horizontale de sa vitesse est conservée (la projection du PFD selon l'axe horizontal donne immédiatement ce résultat), d'où

$$\boxed{v_h = v_0\cos\alpha = \frac{v_0}{2}.}$$

A.N. : $v_h \approx 7{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

3. Durant la chute libre, le mouvement est toujours conservatif : on exploite la conservation de l'énergie mécanique entre l'instant suivant l'éjection, où

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m},i} = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

et l'instant final où la balle atteint l'altitude h, avec

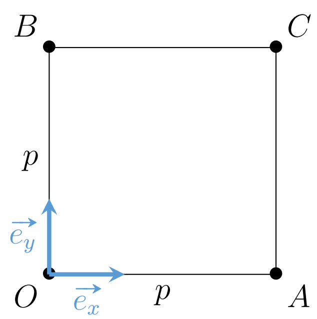
$$\mathcal{E}_{\mathrm{m},f} = \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2\alpha + mgh.$$

Le TEM s'écrit

$$\Delta\mathcal{E}_\mathrm{m} = 0, \quad \text{d'où} \quad \boxed{h = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{3v_0^2}{8g}.}$$

A.N. : $h \approx 7{,}6\,\mathrm{m}$.

Exercice 5 – Calcul de travaux



1. On décompose le travail W_{OAC} sur les trajets $O \to A$ et $A \to C$:

- sur le trajet $O \to A$, $y = 0$, d'où $\overrightarrow{F}(x, y = 0) = -\alpha x^2 \overrightarrow{e_x}$. De plus $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}x\overrightarrow{e_x}$ et $OA = p$, d'où

$$W_{OA} = \int_{O\to A} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \int_0^p -\alpha x^2 \mathrm{d}x = -\frac{\alpha}{3} p^3.$$

- sur le trajet $A \to C$, $x = p$, d'où $\overrightarrow{F}(x = p, y) = \alpha(y^2 - p^2)\overrightarrow{e_x} + 3\alpha p y \overrightarrow{e_y}$. De plus $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y}$ et $AC = p$, d'où

$$W_{AC} = \int_{A\to C} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \int_0^p 3\alpha p y \mathrm{d}y = \frac{3\alpha}{2} p^3.$$

Finalement, avec $W_{OAC} = W_{OA} + W_{AC}$, on obtient

$$\boxed{W_{OAC} = \frac{7}{6}\alpha p^3.}$$

2. On reprend le même raisonnement pour W_{OBC} :

$$W_{OBC} = \int_{O\to B} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} + \int_{B\to C} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \int_0^p 0 \mathrm{d}y + \int_0^p \alpha(p^2 - x^2)\mathrm{d}x = 0 + \frac{2}{3}\alpha p^3,$$

d'où

$$\boxed{W_{OBC} = \frac{2}{3}\alpha p^3.}$$

3. Pour le trajet direct $O \to C$, on utilise $x = y$ sur la trajectoire, d'où $\overrightarrow{F}(x, y = x) = 3\alpha x^2 \overrightarrow{e_y}$. D'autre part, avec $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$, on a $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y} = \mathrm{d}x(\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y})$. On en déduit

$$W_{OC} = \int_{O\to C} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \int_0^p 3\alpha x^2 \mathrm{d}x \quad \text{d'où} \quad \boxed{W_{OC} = \alpha p^3.}$$

4. Le travail de la force $\overrightarrow{F}$ dépend du chemin suivi, cette force est **non conservative**.

Exercice 6 – Étude d'une force

1. Dans l'expression de la force

$$\overrightarrow{F}(r) = \left(-kr + \frac{a}{r^2}\right)\overrightarrow{e_r}, \quad a, k > 0,$$

- le terme $-kr\overrightarrow{e_r}$ est analogue à une force de rappel élastique, qui ramène la masse vers O ;
- le terme $\frac{a}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ est analogue à la force électrostatique entre deux particules de même charge. C'est une force répulsive, qui éloigne m de O.

Ici, r correspond vraisemblablement à la distance entre la particule et l'origine O du repère, on a donc $r > 0$.

2. On cherche la position $r_{\text{éq}}$ de la particule telle que la force qu'elle subie est nulle, c'est-à-dire

$$\vec{F}(r_{\text{éq}}) = 0, \quad \text{d'où} \quad \boxed{r_{\text{éq}} = \left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{1}{3}}.}$$

3. Pour un déplacement élémentaire $\mathrm{d}r\vec{e_r}$, le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ s'écrit

$$\delta W(\vec{F}) = \left(-kr + \frac{a}{r^2}\right)\mathrm{d}r.$$

On remarque que $\mathrm{d}W(\vec{F}) = -\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{p}$, avec

$$\boxed{\mathcal{E}_\mathrm{p}(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{a}{r}.}$$

La force $\vec{F}$ dérive du potentiel $\mathcal{E}_\mathrm{p}(r)$: on a bien

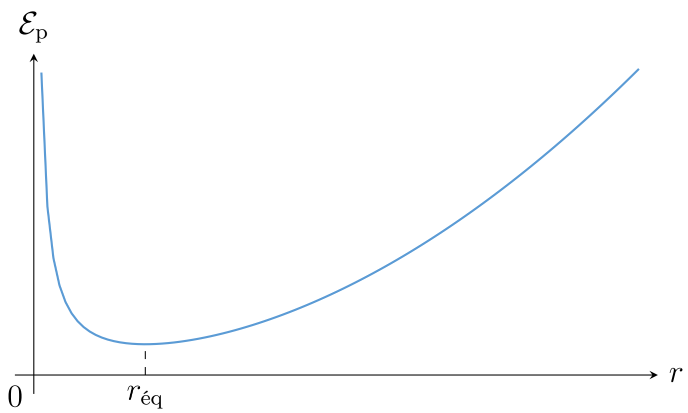
$$\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}\vec{e_r},$$

donc $\vec{F}$ **est une force conservative**.

4. On calcule la dérivée spatiale seconde de l'énergie potentielle :

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r_{\text{éq}}} = 3k > 0.$$

Il s'agit d'une position d'équilibre stable, ce que confirme la représentation graphique.



5. **Méthode 1.** On peut directement utiliser le fait que, au voisinage de la position d'équilibre, le système est analogue à un système masse-ressort constitué d'une masse m et d'une ressort de constante de raideur effective

$$k_\text{eff} = \left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r_{\text{éq}}} = 3k.$$

La pulsation-propre de cet oscillateur est donnée par

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_\text{eff}}{m}}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}.}$$

Méthode 2. On applique le PFD à la particule (dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen...). La projection selon $\overrightarrow{e_r}$ s'écrit

$$m\ddot{r} = -kr + \frac{a}{r^2}.$$

Pour des petites oscillations, on pose $r = r_{\text{éq}} + \varepsilon$, avec $\varepsilon \ll r_{\text{éq}}$, d'où

$$\begin{aligned}
m\ddot{\varepsilon} &= -k(r_{\text{éq}} + \varepsilon) + \frac{a}{(r_{\text{éq}} + \varepsilon)^2} \\
&= -kr_{\text{éq}} - k\varepsilon + \frac{\frac{a}{r_{\text{éq}}^2}}{\left(1 + \frac{\varepsilon}{r_{\text{éq}}}\right)^2} \\
&\underset{\text{DL}_1}{\approx} -kr_{\text{éq}} - k\varepsilon + \frac{a}{r_{\text{éq}}^2}\left(1 - 2\frac{\varepsilon}{r_{\text{éq}}}\right)
\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant $r_{\text{éq}}$ par son expression et après calcul

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{3k}{m}\varepsilon = 0.$$

On reconnait bien l'équation d'un oscillateur harmonique avec la même pulsation propre que précédemment.

Méthode 3. Pour des petites oscillations, on pose $r = r_{\text{éq}} + \varepsilon$, avec $\varepsilon \ll r_{\text{éq}}$, d'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\text{p}}(r_{\text{éq}} + \varepsilon) &= \frac{1}{2}k(r_{\text{éq}} + \varepsilon)^2 + \frac{a}{r_{\text{éq}} + \varepsilon} \\
&= \frac{1}{2}kr_{\text{éq}}^2\left(1 + \frac{\varepsilon}{r_{\text{éq}}}\right)^2 + \frac{\frac{a}{r_{\text{éq}}}}{1 + \frac{\varepsilon}{r_{\text{éq}}}} \\
&\underset{\text{DL}_2}{\approx} \frac{1}{2}kr_{\text{éq}}^2\left(1 + 2\frac{\varepsilon}{r_{\text{éq}}} + \frac{\varepsilon^2}{r_{\text{éq}}^2}\right) + \frac{a}{r_{\text{éq}}}\left(1 - \frac{\varepsilon}{r_{\text{éq}}} + \frac{\varepsilon^2}{r_{\text{éq}}^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}kr_{\text{éq}}^2 + \frac{1}{2}k\varepsilon^2 + \frac{a}{r_{\text{éq}}} + \frac{a\varepsilon^2}{r_{\text{éq}}^3} \quad \text{car} \quad kr_{\text{éq}} - \frac{a}{r_{\text{éq}}^2} = 0 \quad \text{par définition,} \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{\left(k + 2\frac{a}{r_{\text{éq}}^3}\right)}_{3k}\varepsilon^2 + \underbrace{\frac{1}{2}kr_{\text{éq}}^2 + \frac{a}{r_{\text{éq}}}}_{\text{cste}}
\end{aligned}$$

On reconnait comme attendu un potentiel harmonique associé à une ressort de constante de raideur $3k$.

Le mouvement est conservatif car la particule n'est soumise qu'à $\overrightarrow{F}$ qui est conservative. La conservation de l'énergie mécanique s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{m}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{E}_{\text{c}} + \mathcal{E}_{\text{p}}\right) = 0, \quad \text{d'où} \quad m\dot{\varepsilon}\ddot{\varepsilon} + k\dot{\varepsilon}\varepsilon + 2\frac{a}{r_{\text{éq}}^3}\dot{\varepsilon}\varepsilon = 0.$$

En remplaçant $r_{\text{éq}}$ par son expression et en simplifiant par $\dot{\varepsilon}$, on retrouve à nouveau l'équation d'un OH de pulsation propre $\sqrt{3k/m}$.

Exercice 7 – Distance de freinage

1. On s'intéresse à la {voiture} dans le référentiel terrestre supposé galiléen, soumise à son poids, à la réaction normale de la route et à la force de freinage $\vec{F}$. Le mouvement est horizontal, seule la force de freinage travaille : on note W son travail. On applique le TEC :

$$\Delta\mathcal{E}_\mathrm{c} = W, \quad \text{soit} \quad 0 - \frac{1}{2}mv^2 = W \quad \Rightarrow \quad \boxed{W = -\frac{1}{2}mv^2 < 0.}$$

   A.N. : $W \approx -0{,}14\,\mathrm{MJ}$.

2. Par définition

$$W = -Fd, \quad \text{d'où} \quad \boxed{F = -\frac{W}{d}.}$$

   A.N. : $F = 9{,}6\,\mathrm{kN}$.

3. En supposant que la norme de la force est la même, le TEC s'écrit

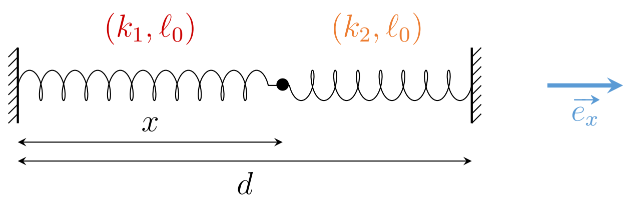
$$-\frac{1}{2}mv'^2 = -Fd', \quad \text{d'où} \quad \boxed{d' = d\frac{v'^2}{v^2}.}$$

   A.N. : $d' \approx 2d = 30\,\mathrm{m}$.

4. Le TEC donne $\mathcal{E}_\mathrm{c} = Fd$, avec $\mathcal{E}_\mathrm{c} \propto v^2$. La distance de freinage est la distance nécessaire pour dissiper l'énergie cinétique de la voiture, or cette distance est proportionnelle à $\mathcal{E}_\mathrm{c}$ donc proportionnelle au carré de la vitesse.

Exercice 8 – Masse doublement retenue

1. On considère la {masse m} dans le référentiel lié au sol supposé galiléen. La masse est soumise aux forces de rappel des ressorts qui sont conservatives, et à son poids et à la réaction du support qui ne travaillent pas puisque le mouvement est horizontal. On néglige les frottements.

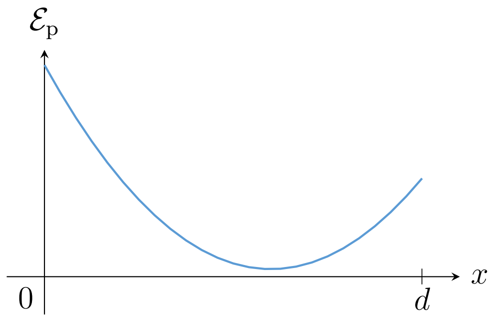


   Par définition

$$\mathcal{E}_\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}k_1(\ell_1 - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}k_2(\ell_2 - \ell_0)^2,$$

   d'où, avec $\ell_1 = x$ et $\ell_2 = d - x$

$$\boxed{\mathcal{E}_\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}k_1(x - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}k_2(d - x - \ell_0)^2.}$$



2. On cherche la position $x_{éq}$ où l'énergie potentielle est extrémale, soit telle que

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{éq}} = 0.$$

On a

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x} = k_1(x-\ell_0) - k_2(d-x-\ell_0), \quad \text{d'où} \quad \boxed{x_{éq} = \frac{k_2 d + (k_1-k_2)\ell_0}{k_1+k_2}.}$$

On retrouve bien $x_{éq} = d/2$ pour $k_1 = k_2$. De plus les comportements quand $k_1 \gg k_2$ et inversement sont cohérents.

3. On étudie le signe de la dérivée spatiale seconde au niveau de la position d'équilibre :

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_{éq}} = k_1 + k_2 > 0.$$

$x_{éq}$ correspond à un minimum d'énergie potentielle : il s'agit d'une **position d'équilibre stable**.

4. Le système n'est soumis qu'à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas : le mouvement est conservatif. La conservation de l'énergie mécanique s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p) = 0, \quad \text{d'où} \quad m\dot{x}\ddot{x} + k_1\dot{x}(x-\ell_0) + -k_2\dot{x}(d-x-\ell_0) = 0.$$

En simplifiant par $\dot{x}$, on retrouve l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique analogue à un système masse-ressort avec un unique ressort de constante de raideur $k_1 + k_2$, soit

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k_1+k_2}{m}x = \frac{k_1+k_2}{m}x_{éq}.}$$

5. La résolution conduit à

$$\boxed{x(t) = x_{éq} + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t), \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}.}$$

Exercice 9 – Mouvement sur un cercle

1. On considère le système {bille} dans le référentiel terrestre supposé galiléen, soumis à son poids et à la réaction du support. Le mouvement est circulaire, d'où, en coordonnées polaires,

$$\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}.$$

Le poids dérive d'une énergie potentielle de pesanteur de la forme

$$\mathcal{E}_\mathrm{p}(\theta) = mgR(1 - \cos\theta).$$

Par ailleurs, la réaction du support ne travaille pas : le mouvement est conservatif. L'énergie mécanique du système

$$\mathcal{E}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR(1 - \cos\theta)$$

se conserve, d'où

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \text{soit} \quad mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgR\dot{\theta}\sin\theta = 0.$$

En simplifiant par $mR\dot{\theta}$, on obtient

$$\boxed{R\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0.}$$

On reconnait sans surprise l'équation du mouvement d'un pendule simple.

2. On applique le PFD à la bille dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$mR(\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - \dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}) = mg(\cos\theta\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\overrightarrow{e_\theta}) - N\overrightarrow{e_r}.$$

La projection selon $\overrightarrow{e_r}$ donne

$$N = mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta.$$

Par ailleurs la conservation de l'énergie mécanique s'écrit, entre l'instant initial et un instant quelconque :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR(1 - \cos\theta), \quad \text{d'où} \quad mR\dot{\theta}^2 = \frac{mv_0^2}{R} + 2mg(\cos\theta - 1).$$

En injectant dans l'expression précédente, on obtient l'expression indiquée dans l'énoncé :

$$\boxed{N = m\left(\frac{v_0^2}{R} + g(3\cos\theta - 2)\right).}$$

3. La norme de la réaction du support est minimale en $\theta = \pi$ et vaut alors

$$N_\mathrm{min} = m\left(\frac{v_0^2}{R} - 5g\right).$$

La bille reste en contact avec le support tant que $N_\mathrm{min} > 0$, c'est-à-dire

$$\frac{v_0^2}{R} > 5g \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 > v_\mathrm{min} = \sqrt{5Rg}.}$$

On n'a bien retenu que la racine positive car v_0 est la norme de la vitesse initiale.

4. Si $v_0 < v_{\min}$, l'angle de décollement θ_0 est celui pour lequel la réaction du support s'annule, c'est-à-dire

$$\frac{v_0^2}{R} + g(3\cos\theta_0 - 2) = 0, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\theta_0 = \arccos\left(\frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3gR}\right).}$$

On retrouve bien le cas limite $\theta_0 = \pi$ pour $v_0 = v_{\min}$.

Exercice 10 – Navire à moteur

1. On applique le théorème de la puissance cinétique dans le référentiel lié au port supposé galiléen au bateau soumis à la résistance de l'eau de puissance $-kv_0^3 < 0$ et à la force de propulsion de puissance $\mathcal{P}$ (le poids et la poussée d'Archimède ne travaillent pas car le mouvement est horizontal). Puisque le mouvement du bateau est uniforme, on a

$$0 = \mathcal{P} - kv_0^3, \quad \text{d'où} \quad \boxed{k = \frac{\mathcal{P}}{v_0^3}.}$$

A.N. : $v_0 = 7{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, d'où $k = 11 \times 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$.

2. Une fois les machines arrêtées, le bateau n'est soumis qu'à une force de puissance non nulle, celle de la résistance de l'eau. Le théorème de la puissance cinétique s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -kv^3, \quad \text{d'où} \quad m\dot{v}v = -kv^3.$$

En simplifiant par v et en faisant apparaitre $L = m/k$, on obtient l'équation différentielle vérifiée par la vitesse du bateau après arrêt des machines :

$$L\dot{v} = -v^2.$$

Méthode 1. On réécrit l'équation obtenue sous la forme

$$-\frac{\dot{v}}{v^2} = \frac{1}{L}, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{L}.$$

En intégrant entre l'instant $t = 0$ où la vitesse vaut v_0 et un instant quelconque, on obtient

$$\boxed{v(t) = \frac{v_0 L}{v_0 t + L}.}$$

Méthode 2 : séparation des variables. On écrit $\dot{v} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ et on sépare les variables :

$$L\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -v^2, \quad \text{d'où} \quad -L\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = \mathrm{d}t,$$

puis on intègre avec la même condition initiale que dans la méthode 1 bien sûr :

$$L\int_{v_0}^{v} -\frac{\mathrm{d}v'}{v'^2} = \int_0^t \mathrm{d}t', \quad \text{d'où} \quad L\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right) = t.$$

On retrouve évidemment le résultat précédent.

Rq : la méthode de séparation des variables est souvent utile pour intégrer des équations différentielle dont on ne connait pas forcément de solution analytique générale. Elle est beaucoup utilisé en chimie pour traiter de cinétique de réaction.

3. Avec t_P l'instant où le navire atteint la passe, on a

$$X = \int_0^{t_P} v \mathrm{d}t.$$

Méthode 1.

$$X = \int_0^{t_P} \frac{v_0 L}{v_0 t - L} \mathrm{d}t = [L \ln(v_0 t + L)]_0^{t_P} = L \ln\left(\frac{v_0 t_P + L}{L}\right) = L \ln\left(\frac{v_0 t_P + L}{v_0 L} v_0\right).$$

On reconnait l'inverse de la vitesse à l'entrée de la passe

$$\frac{1}{v_P} = \frac{v_0 t_P + L}{v_0 L},$$

d'où

$$\boxed{X = L \ln\left(\frac{v_0}{v_P}\right).}$$

A.N. : $X \approx 1850\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{mille}$.

Méthode 2 : changement de variable. On effectue le changement de variable

$$t = L\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right) \quad \text{d'où} \quad \mathrm{d}t = -L\frac{\mathrm{d}v}{v^2},$$

avec $v(0) = v_0$ et $v(t_P) = v_P$:

$$X = \int_{v_0}^{v_P} v \cdot \left(-L\frac{\mathrm{d}v}{v^2}\right) = -L \int_{v_0}^{v_P} \frac{\mathrm{d}v}{v} = -L \ln\left(\frac{v_P}{v_0}\right).$$

On retrouve bien le même résultat que précédemment.

4. On a

$$\boxed{t_P = L\left(\frac{1}{v_P} - \frac{1}{v_0}\right).}$$

A.N. : $t_P \approx 773\,\mathrm{s}$.

5. En notant d la distance entre la passe et l'entrée du quai et en réutilisant les résultats précédents, on a immédiatement

$$d = L \ln\left(\frac{v_P}{v_Q}\right), \quad \text{d'où} \quad \boxed{v_Q = v_P e^{-d/L}.}$$

A.N. : $v_Q \approx 0{,}73\,\text{nœud} = 0{,}37\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

6. Pour effectuer un arrêt d'urgence, le bateau peut faire machine arrière : le TPC s'écrit alors sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -kv^3 - \mathcal{P}' < -kv^3,$$

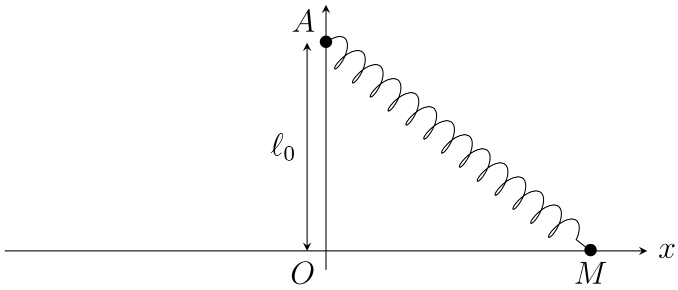
où $\mathcal{P}' > 0$ est la puissance fournie par les machines. L'énergie cinétique du bateau décroit bien plus rapidement dans ce cas.

Exercice 11 – Interactions entre atomes

1. Par définition, la force exercée par l'atome de gauche sur l'atome de droite, avec $\overrightarrow{e_x}$ le vecteur unitaire colinéaire à l'axe entre les deux atomes et orienté vers la droite, est donnée par
$$\boxed{\overrightarrow{F}(x) = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{e_x} = \left(-\frac{6a}{x^7} + \frac{12b}{x^{13}}\right)\overrightarrow{e_x}.}$$
2. On remarque que
$$\lim_{x\to 0}\mathcal{E}_\mathrm{p}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\mathcal{E}_\mathrm{p}(x) = 0.$$
Si $\mathcal{E}_\mathrm{m} > 0$, l'atome de masse m est dans un état de diffusion : il peut s'éloigner infiniment de l'atome.
Par ailleurs, si $\mathcal{E}_\mathrm{m} < 0$ (tout en restant supérieure au minimum d'énergie potentielle), l'atome est dans état lié : il oscille autour de la position d'équilibre. Les deux atomes forment alors une molécule.
3. La distance d'équilibre x_0 est telle que
$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = 0.$$
Avec
$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x} = \frac{6a}{x^7} - \frac{12b}{x^{13}} = \frac{6}{x^7}\left(a - \frac{2b}{x^6}\right),$$
on obtient une position d'équilibre
$$\boxed{x_0 = \left(\frac{2b}{a}\right)^{\frac{1}{6}}.}$$
On évalue la dérivée seconde en ce point :
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} = -\frac{42a}{x_0^8} + \frac{156b}{x_0^{14}} = \frac{6}{x_0^8}\left(-7a + \frac{26b}{x_0^6}\right) = \frac{36a}{x_0^8} = 18\frac{a^2}{b}\left(\frac{a}{2b}\right)^{\frac{1}{3}} > 0.$$
Il s'agit d'un minimum d'énergie potentielle : **la position x_0 correspond à une position d'équilibre stable**.
4. Au voisinage de x_0, soit pour $x = x_0 + \varepsilon$ où $\varepsilon \ll x_0$, la formule de Taylor-Young limitée à l'ordre 1 s'écrit
$$F(x+\varepsilon) \approx F(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}\varepsilon.$$
Or $F(x_0) = 0$ et $\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = -\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0}$, d'où
$$F(x) \approx -kx, \quad \text{avec} \quad \boxed{k = \left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} = 18\frac{a^2}{b}\left(\frac{a}{2b}\right)^{\frac{1}{3}}.}$$
La période des oscillations est donc
$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.}$$

Exercice 12 – Oscillateur anharmonique

1. On s'intéresse au {point matériel} de masse m = cste dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, soumis à la force de rappel du ressort (le poids et la réaction de l'axe ne travaillent pas). Les frottements sont négligés.



L'énergie potentielle du point matériel est donc celle associée à la force de rappel du ressort :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2.$$

Avec le théorème de Pythagore, on a $\ell = \sqrt{\ell_0^2 + x^2}$, d'où

$$\boxed{\mathcal{E}_{\mathrm{p}}(x) = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{\ell_0^2 + x^2} - \ell_0\right)^2.}$$

2. On a

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}}(x) = \frac{1}{2}k\left(\ell_0\sqrt{1+\left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2} - \ell_0\right)^2 = \frac{1}{2}k\ell_0^2\left(\sqrt{1+\left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2} - 1\right)^2.$$

Pour $x \ll \ell_0$, on a $x/\ell_0 \ll 1$. Avec le développement limité $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon/2$, on a

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}}(x) \approx \frac{1}{2}k\ell_0^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2 - 1\right)^2, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathcal{E}_{\mathrm{p}}(x) \approx \frac{kx^4}{8\ell_0^2}.}$$

3. On a

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}x} = \frac{kx^3}{2\ell_0^2} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{3kx^2}{2\ell_0^2}.$$

Il existe une seule position d'équilibre en $x = 0$. Toutefois, puisque $\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} = 0$, on ne peut pas conclure...
Il faut raisonner sur l'expression de la force $F(x)$ associée à cette énergie potentielle en poussant le développement limité à un ordre supérieur. Puisque $\mathcal{E}_{\mathrm{p}} \propto x^4$, ses dérivées première, seconde et troisième sont nulles en 0. Les dérivées première et seconde de la force F sont donc nulle en 0. Au voisinage de 0, c'est-à-dire pour $x \ll \ell_0$, la force $F(x)$ s'écrit selon la formule de Taylor-Young au premier ordre non nul :

$$F(x) \approx \underbrace{F(0)}_{0} + \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right|_0}_{0} x + \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}x^2}\right|_0}_{0} \frac{x^2}{2} + \left.\frac{\mathrm{d}^3F}{\mathrm{d}x^3}\right|_0 \frac{x^3}{6} = -\left.\frac{\mathrm{d}^4\mathcal{E}_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}x^4}\right|_0 \frac{x^3}{6} = -\frac{kx^3}{2\ell_0^2}.$$

Si M s'éloigne de O dans le sens des x croissants, on a $x > 0$ et $F(x) < 0$: la force de rappel est dirigée dans le sens des x décroissants et ramène M vers O. De même, si M s'éloigne dans le sens opposé, $x < 0$ et $F(x) > 0$: la force ramène M vers O. La force de rappel ramène bien le point matériel vers sa position d'équilibre, la position $x = 0$ **est une position d'équilibre stable**. Ce résultat était intuitivement attendu.

La particule se trouve dans un état lié et le mouvement ne possède qu'un degré de liberté, le mouvement est donc **périodique**.

Cependant, le mouvement **n'est pas harmonique** car le potentiel ne l'est pas.

4. Le mouvement est conservatif : la conservation de l'énergie mécanique entre l'instant initial et un instant quelconque s'écrit

$$0 + \frac{ka^4}{8\ell_0^2} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{kx^4}{8\ell_0^2}, \quad \text{d'où} \quad \dot{x}^2 = \frac{ka^4}{4m\ell_0^2}\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^4\right).$$

La fonction énergie potentielle est paire, donc le mouvement de M est symétrique autour de O. La durée nécessaire pour passer de $x = a$ à $x = 0$ correspond à un quart de période. Sur cette portion, la vitesse est négative, d'où

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{ka^4}{4m\ell_0^2}\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^4\right)}.$$

Avec $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, on sépare les variables, d'où

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^4}} = -\mathrm{d}t\sqrt{\frac{ka^4}{4m\ell_0^2}}.$$

On intègre finalement entre 0 et $T/4$ où x passe de a à 0 :

$$\int_a^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^4}} = -\int_0^{\frac{T}{4}} \mathrm{d}t\sqrt{\frac{ka^4}{4m\ell_0^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^4}} = \int_0^{\frac{T}{4}} \mathrm{d}t\sqrt{\frac{ka^4}{4m\ell_0^2}}.$$

Le terme de droite s'intègre facilement pour donner

$$\frac{T}{4}\sqrt{\frac{ka^4}{4m\ell_0^2}} = \frac{a^2T}{8\ell_0}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Pour le terme de gauche, on réalise le changement de variable $u = x/a$, d'où $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/a$ et la borne supérieure de l'intégrale devient 1 :

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^4}} = \int_0^1 \frac{a\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^4}} = aI.$$

Finalement, on obtient

$$\boxed{T = \frac{8I\ell_0}{a}\sqrt{\frac{m}{k}}.}$$

La quantité obtenue est bien homogène à l'inverse d'une pulsation.

La période T est inversement proportionnelle à l'amplitude a des oscillations : plus l'amplitude est grande, plus la période est courte.