DM 12 – Mécanique

Exercice 1 – Montagnes russes

Tour de chauffe

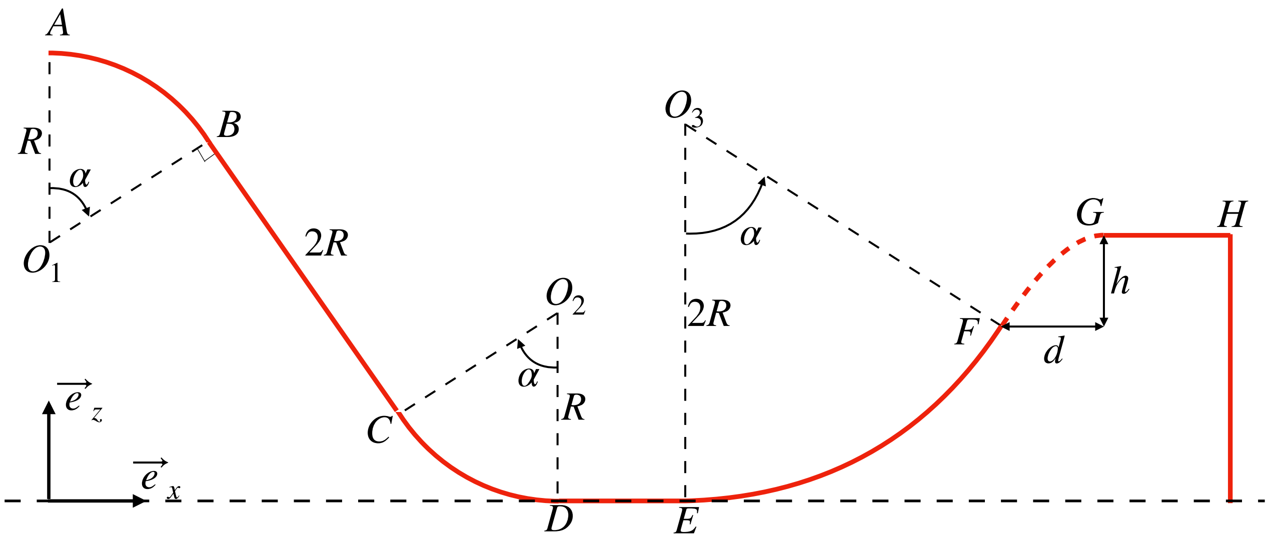
RCO **1.** À l'aide d'un théorème énergétique, déterminer l'altitude maximale $z_{\max}$ atteinte par un point matériel lancé verticalement vers le haut avec une vitesse de norme v_0 depuis l'origine O du repère, d'altitude $z = 0$.

RCO **2.** Que devient cette expression si l'objet est lancé vers le haut avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$, toujours de norme v_0, mais formant cette fois un angle α avec l'horizontale ?

RCO **3.** Retrouver le dernier résultat en appliquant le PFD. Quelle est l'abscisse x_0 du point où l'altitude maximale est atteinte ?

Montagnes russes

On s'intéresse à des montagnes russes composées d'une piste de fête foraine sur laquelle évolue un petit chariot mobile contenant deux passagers. Le chariot et ses passagers, de masse $m = 200\,\mathrm{kg}$ et de dimensions négligeables, est mobile sans frottement sur cette piste, sauf pour la portion GH où un revêtement rugueux permet de freiner le chariot. On prendra $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.



La piste, représentée ci-dessus sans soucis d'échelle, est située dans un plan vertical et est formée de plusieurs parties :

- AB : partie circulaire de centre O_1, de rayon $R = 4{,}0\,\mathrm{m}$ et d'angle $\alpha = 30°$;
- BC : partie rectiligne inclinée, de longueur $2R$, se raccordant tangentiellement à AB et CD ;
- CD : partie circulaire de centre O_2, de rayon R et d'angle α ;
- DE : partie rectiligne se raccordant tangentiellement à CD et EF ;
- EF : partie circulaire de centre O_3, de rayon $2R$ et d'angle α.

La piste est interrompue entre F et G. Le chariot décrit alors une portion de parabole qui se raccorde à la piste en G (sommet de la parabole). Puis il arrive sur la piste GH recouverte d'un revêtement rugueux et on veut qu'il s'arrête en H afin de garantir des sensations fortes mais aussi l'intégrité physique des passagers.

On recommande fortement pour les questions suivantes de valider vos résultats à l'aide de cas particuliers ($\alpha = 0$, $\alpha = \pi/2$, etc.).

4. Le chariot est abandonné avec une vitesse négligeable en A. Déterminer, en utilisant le théorème de l'énergie mécanique, sa vitesse v_B en B en fonction de g, R et α.

5. Montrer alors que la réaction normale du support $\vec{N}_B$ s'écrit en B sous la forme :

$$\vec{N}_B = mg(3\cos\alpha - 2)\frac{\overrightarrow{O_1B}}{R}.$$

Exprimer, puis calculer l'angle α pour lequel le chariot quitte éventuellement la piste en B ? Est-ce le cas ici ?

6. Déterminer, en utilisant le théorème de l'énergie mécanique, les normes des vitesses du chariot aux points C, D, E puis F. Tout doit être exprimé en fonction de g, R et α. On montrera notamment que $v_F = \sqrt{4gR\sin\alpha}$. Effectuer les applications numériques.

7. On s'intéresse à la portion de trajectoire parabolique FG (on rappelle que G est le sommet de la parabole) où le chariot n'est soumis qu'à son poids. Exprimer, en fonction de α, g et R, les distances h (altitude maximale) et d nécessaires. Faut-il modifier ces valeurs pour s'adapter au poids des passagers, qui peut fluctuer d'un équipage à l'autre ?

8. Exprimer également la norme de la vitesse v_G en fonction de v_F et α.

9. Sur la partie GH, il s'exerce une force de frottement solide $\vec{R}_T$ avec $\left\|\vec{R}_T\right\| = f\left\|\vec{R}_N\right\|$ entre les composantes de la réaction du rail sur le wagon, où $f = 0{,}5$ est le coefficient de frottement. Exprimer $\left\|\vec{R}_T\right\|$ en fonction de f, m et g. Effectuer l'application numérique.

10. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, exprimer en fonction de R, α et f la distance $d' = GH$ à choisir pour que le chariot s'arrête en H et ne tombe pas.

Exercice 2 – Molécule de monoxyde de carbone

On rappelle, au voisinage du point x_0, la formule de Taylor-Young à l'ordre deux :

$$f(x) \approx f(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}(x - x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0}\frac{(x - x_0)^2}{2!}.$$

Oscillateur…

RCO **1.** Établir l'expression de l'énergie potentielle élastique associée à un ressort de longueur ℓ, de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k.

RCO **2.** Par un théorème énergétique, établir l'équation différentielle vérifiée par la longueur $\ell(t)$ du ressort d'un système {masse-ressort} vertical, la masse étant située sous le point d'attache du ressort. On précisera la pulsation propre ω_0 et la position d'équilibre $\ell_{\text{éq}}$ en fonction de la masse m, la constante de raideur k, la longueur à vide ℓ_0 et/ou de l'accélération de la pesanteur g.

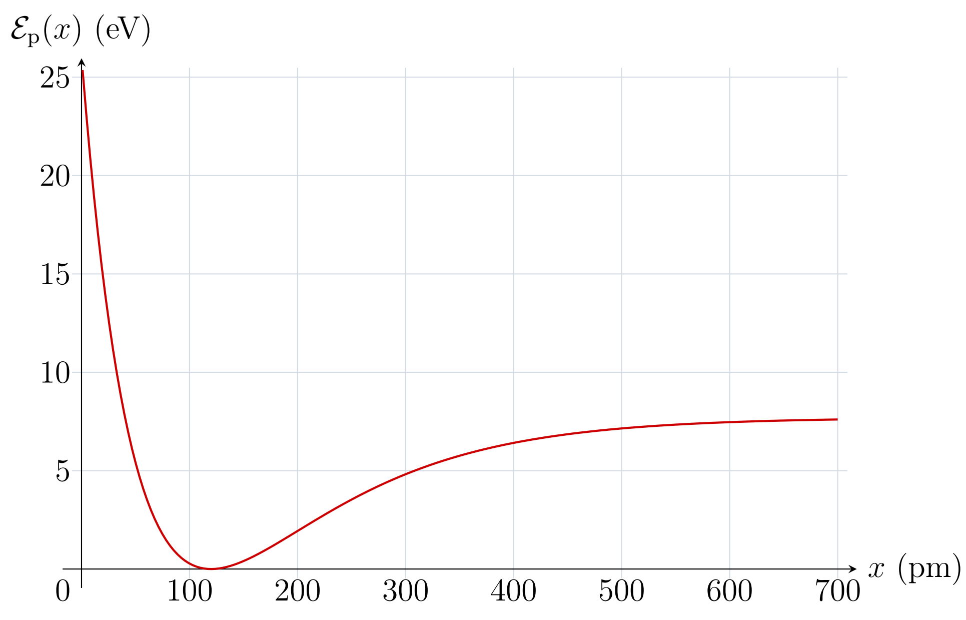
Monoxyde de carbone

Le monoxyde de carbone est un composé très toxique qui, en se fixant sur l'hémoglobine des globules rouges, empêche le transport du dioxygène.

Une molécule de monoxyde de carbone CO est modélisée par deux masses ponctuelles m_1 pour l'atome de carbone et m_2 pour l'atome d'oxygène. Pour simplifier, on considérera que l'atome de carbone est fixe dans un référentiel galiléen et que l'atome d'oxygène ne peut subir que des déplacements rectilignes le long d'un axe (Ox). L'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est donnée par :

$$\mathcal{E}_\text{p}(x) = \mathcal{E}_0\left(1 - e^{-\beta(x - x_0)}\right)^2,$$

où x est la distance entre les deux atomes et où $\mathcal{E}_0$, β et x_0 sont des constantes positives. L'attraction gravitationnelle est négligeable à cette échelle. On donne le graphe de $\mathcal{E}_\text{p}(x)$ ci-dessous.



3. Quelles sont les dimensions de $\mathcal{E}_0$, β et x_0 ?

RCO 4. Définir « position d'équilibre », « position d'équilibre stable » et « position d'équilibre instable », en discutant des forces subies par le système au niveau de telles positions. Rappeler la condition portant sur l'énergie potentielle qui permet d'obtenir les positions d'équilibre du système et leur stabilité.

5. Montrer que x_0 est une position d'équilibre stable.

6. Déterminer les expressions de $\mathcal{E}_\mathrm{p}(x)$ en x_0 et l'infini. En déduire, grâce au graphique, les valeurs de x_0 et $\mathcal{E}_0$. Que représentent physiquement ces deux constantes ?

7. Analyser qualitativement le mouvement de l'atome d'oxygène si son énergie mécanique est inférieure à $\mathcal{E}_0$.

8. Exprimer la force $\vec{F}(x)$ subie par l'atome d'oxygène. Comment qualifier cette force ?

On s'intéresse au mouvement de vibration de la molécule de CO au voisinage de x_0. On pose $\varepsilon = \beta(x - x_0)$.

9. En effectuant un développement limité à l'ordre 2 de l'énergie potentielle d'interaction au voisinage de x_0 (pour $\varepsilon \ll 1$), montrer que l'interaction entre les deux atomes peut-être modélisée par une énergie potentielle élastique dont on précisera l'expression de la constante de raideur k.

10. Établir l'équation du mouvement au voisinage de la position d'équilibre en utilisant un théorème énergétique.

11. En déduire la fréquence f_0 des petites oscillations de la molécule de monoxyde de carbone autour de sa position d'équilibre. Faire l'application numérique, avec $\beta = 8{,}69 \times 10^{-3}\,\mathrm{pm}^{-1}$. La masse molaire de l'oxygène est $M(\mathrm{O}) = 16\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$.

12. Que se passe-t-il si l'on communique à la molécule une énergie mécanique $\mathcal{E}_\mathrm{m} > \mathcal{E}_0$?

13. Proposer une estimation du déplacement δx de la position d'équilibre si l'on tient compte de l'interaction gravitationnelle. L'hypothèse selon laquelle l'interaction gravitationnelle est négligeable devant les autres est-elle raisonnable ?

Donnée : constante d'interaction gravitationnelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.