DM 12 – Mécanique
Correction

Exercice 1 – Montagnes russes

1. En appliquant le TEM, on obtient

$$\boxed{h = \frac{v_0^2}{2g}.}$$

2. Cf. Ex. 4 TD M3 :

$$\boxed{h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.}$$

3. Cf. Ex. 11 TD M2 :

$$\boxed{x_0 = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g}.}$$

4. Le chariot n'est soumis qu'au poids et à la réaction de la piste qui ne travaille pas : le mouvement est conservatif. En A, on a $v_A \approx 0$, d'où, en appliquant le TEM avec $z_B - z_A = -R(1-\cos\alpha)$:

$$\boxed{v_B = \sqrt{2gR(1-\cos\alpha)}.}$$

Vérification : Pour $\alpha = 0$, on a bien $v_B = 0$.

5. On applique le PFD dans la base polaire centrée en O_1. En B, on a $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - \frac{v_B^2}{R}\vec{e_r}$ et on projette selon $\vec{e_r} = \overrightarrow{O_1B}/R$:

$$-m\frac{v_B^2}{R} = N_B - mg\cos\alpha, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{N}_B = mg(3\cos\alpha - 2)\frac{\overrightarrow{O_1B}}{R}.}$$

La réaction normale s'annule avant B si

$$\boxed{\alpha > \arccos\left(\frac{2}{3}\right).}$$

A.N. : $\arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48° > \alpha = 30°$: le chariot ne décolle pas.

6. À nouveau, on applique le TEM entre A et C, D, E, ou F. Il suffit d'exprimer les différentes différences d'altitude :

- $z_C - z_A = z_B - z_A - 2R\sin\alpha$;
- $z_D - z_A = z_C - z_A - R(1-\cos\alpha)$;
- $z_E - z_A = z_D - z_A$;

- $z_F - z_A = z_D - z_A + 2R(1-\cos\alpha)$,

d'où

$$\boxed{v_C = \sqrt{2gR(1-\cos\alpha+2\sin\alpha)},} \quad \boxed{v_D = v_E = \sqrt{4gR(1-\cos\alpha+\sin\alpha)},}$$

et on retrouve bien

$$\boxed{v_F = \sqrt{4gR\sin\alpha}.}$$

A.N. : $v_C = 9{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_D = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $v_F = 8{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

7. On transpose directement les résultats des questions 2 et 3, avec $v_0 = v_F$, $d = x_0$ et $h = z_{\max}$, d'où

$$\boxed{d = 2R\sin\alpha\sin(2\alpha)} \quad \text{et} \quad \boxed{h = 2R\sin^3\alpha.}$$

Ces valeurs ne dépendent pas de m, il n'est pas nécessaire de les modifier à chaque nouvel équipage.

8. Le chariot est en chute libre : la composante horizontale du vecteur vitesse est constante tandis que sa composante verticale est nulle en G, on a donc

$$\boxed{v_G = v_F\cos\alpha.}$$

9. La projection du PFD appliquée au chariot sur l'axe vertical donne immédiatement $\left\|\overrightarrow{R}_N\right\| = mg$, d'où

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{R}_T\right\| = fmg.}$$

A.N. : $\|R_T\| = 1{,}0\,\mathrm{kN}$.

10. Sur la portion GH, seule la force de frottement $\overrightarrow{R}_T$ travaille, et son travail sur la distance d' s'exprime par $W = -fmgd'$. On applique le TEC entre G et H où le chariot s'arrête :

$$0 - \frac{1}{2}mv_G^2 = W,$$

d'où, en remplaçant v_G par son expression

$$\boxed{d' = \frac{R\cos\alpha\sin(2\alpha)}{f}.}$$

A.N. : $d' = 6{,}0\,\mathrm{m}$: on remarque que la distance d' augmente si R augmente et si f diminue, ce qui est cohérent.

Exercice 2 – Molécule de monoxyde de carbone

1. Cf. cours.

$$\boxed{\mathcal{E}_{\mathrm{p}}(\ell) = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2.}$$

2. La masse n'est soumise qu'au poids et à la force de Hooke qui sont conservatives. La conservation de l'énergie mécanique s'écrit

$$\frac{1}{2}m\dot{\ell}^2 - mg\ell + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \text{cste},$$

d'où, en dérivant par rapport au temps

$$\boxed{\ddot{\ell} + \omega_0^2\ell = \omega_0^2\ell_{\text{éq}},} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}.$$

3. On a

$$\boxed{[\mathcal{E}_0] = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^2\cdot\mathrm{T}^{-2}, \quad [\beta] = \mathrm{L}^{-1} \quad \text{et} \quad [x_0] = \mathrm{L}.}$$

4. Cf. cours.
5. On a

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x}(x) = 2\beta\mathcal{E}_0 e^{-\beta(x-x_0)}\left(1 - e^{-\beta(x-x_0)}\right),$$

qui s'annule bien en $x = x_0$. De plus

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = 2\beta^2\mathcal{E}_0 > 0.$$

La position $x = x_0$ est une **position d'équilibre stable**.

6. On a

$$\boxed{\mathcal{E}_{\mathrm{p}}(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty}\mathcal{E}_{\mathrm{p}}(x) = \mathcal{E}_0.}$$

Graphiquement $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}(x)$ est nulle (et minimale) en $x \approx 120\,\mathrm{pm}$ et tend vers $8\,\mathrm{eV}$ aux grandes distances x :

$$\boxed{x_0 \approx 120\,\mathrm{pm} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_0 \approx 8\,\mathrm{eV}.}$$

x_0 correspond à la longueur de la liaison covalente, c'est-à-dire à la distance entre les noyaux des atomes et $\mathcal{E}_0$ correspond à l'énergie de liaison, c'est-à-dire l'énergie à fournir pour casser la liaison entre les deux atomes.

7. Si $\mathcal{E}_{\mathrm{m}} < \mathcal{E}_0$, l'atome d'oxygène est dans un état lié : il est piégé dans le puits de potentiel. Le mouvement est de plus unidimensionnel, donc périodique. L'atome oxygène effectue des **oscillations autour de** x_0.

8. Par définition

$$\vec{F}(x) = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}\vec{e_x}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{F}(x) = -2\beta\mathcal{E}_0 e^{-\beta(x-x_0)}\left(1-e^{-\beta(x-x_0)}\right)\vec{e_x}.}$$

Il s'agit d'une force **conservative**.

9. En utilisant la formule de Taylor-Young ou en utilisant l'expression du DL de $e^\varepsilon \approx 1+\varepsilon+\varepsilon^2/2$ pour $\varepsilon \ll 1$, on obtient, en négligeant les termes d'ordre supérieur à deux $\mathcal{E}_\mathrm{p}(\varepsilon) \approx \mathcal{E}_0\varepsilon^2$, soit

$$\boxed{\mathcal{E}_\mathrm{p}(x) \approx \mathcal{E}_0\beta^2(x-x_0)^2.}$$

On retrouve un potentiel harmonique, analogue à l'énergie potentielle d'un ressort de constante de raideur

$$\boxed{k = 2\mathcal{E}_0\beta^2.}$$

10. Au voisinage de la position d'équilibre, la situation est analogue à la question 2 sans le poids et en remplaçant ℓ et ℓ_0 par x et x_0. On a donc

$$\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2 x = \omega_0^2 x_0,} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0\beta^2}{m_2}}.$$

11. La fréquence des oscillations est alors donnée par

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0\beta^2}{m_2}}.}$$

A.N. : $m_2 = M(\mathrm{O})/\mathcal{N}_A = 2{,}7\times10^{-26}\,\mathrm{kg}$, $\beta = 8{,}69\times10^{9}\,\mathrm{m}^{-1}$, $\mathcal{E}_0 = 1{,}3\times10^{-18}\,\mathrm{J}$ d'où $f_0 = 14\,\mathrm{THz}$. Cette fréquence, associée à une longueur d'onde dans le vide de $22\,\mathrm{\mu m}$ est située dans le domaine infrarouge, ce qui est cohérent pour une vibration d'élongation moléculaire.

12. Pour $\mathcal{E}_\mathrm{m} > \mathcal{E}_0$, l'atome d'oxygène est dans un état de diffusion et s'éloigne infiniment de l'atome de carbone : la liaison est rompue.

13. On suppose le déplacement de la position d'équilibre $x - x_0 = \delta x$ faible, c'est-à-dire $|\delta x/x_0| \ll 1$. On pose $\epsilon = \delta x/x_0$. L'approximation harmonique reste alors valable et l'énergie potentielle d'interaction $\mathcal{E}_\mathrm{p}$ devient

$$\mathcal{E}_\mathrm{p}(\epsilon) = \mathcal{E}_0\beta^2x_0^2\epsilon^2.$$

L'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle entre les atomes s'écrit

$$\mathcal{E}_\mathrm{p,g}(x) = -\frac{K}{x}, \quad \text{avec} \quad K = Gm_1m_2.$$

De même, au voisinage de la position d'équilibre avec $1/(1+\epsilon) \approx 1-\epsilon+\epsilon^2$ pour $\epsilon \ll 1$, on obtient

$$\mathcal{E}_\mathrm{p,g}(\epsilon) = -\frac{K}{x_0(1+\epsilon)} \underset{\mathrm{DL}_2}{\approx} -\frac{K}{x_0}(1-\epsilon+\epsilon^2).$$

L'énergie potentielle d'interaction totale $\mathcal{E}_{\mathrm{p,tot}}$ s'écrit donc

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p,tot}}(\epsilon) = \mathcal{E}_0\beta^2 x_0^2\epsilon^2 - \frac{K}{x_0}(1-\epsilon+\epsilon^2).$$

On cherche la valeur de $\epsilon_{\text{éq}}$ de ϵ qui annule

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathrm{p,tot}}}{\mathrm{d}\epsilon}(\epsilon) = 2\mathcal{E}_0\beta^2 x_0^2\epsilon - \frac{K}{x_0}(2\epsilon-1), \quad \text{soit} \quad \epsilon_{\text{éq}} = -\frac{\frac{K}{x_0}}{2\left(\mathcal{E}_0\beta^2 x_0^2 - \frac{K}{x_0}\right)}.$$

Avec $m_1 \approx 12m_n$ et $m_2 \approx 16m_n$, on obtient $K/x_0 \approx 2\times10^{-33}\,\mathrm{eV}$ et $\mathcal{E}_0\beta^2x_0^2 \approx 9\,\mathrm{eV}$: le premier terme, qui donne l'ordre de grandeur de l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle proche de x_0 est bien très largement négligeable devant les autres interactions ! On obtient finalement

$$\boxed{\delta x \approx -\frac{Gm_1m_2}{2\mathcal{E}_0\beta^2x_0^2}.}$$

A.N. : $\delta x \sim -10^{-44}\,\mathrm{m}$.
Cette valeur est négative ce qui correspond à un raccourcissement de la liaison : l'interaction gravitationnelle est attractive. Elle est par ailleurs extrêmement faible devant la longueur de la liaison x_0 : il est tout à fait raisonnable de négliger l'interaction gravitationnelle pour décrire le comportement de la molécule. On vérifie bien $|\delta x/x_0| \ll 1$ ce qui valide l'hypothèse initiale ayant permis d'effectuer les différents DL.