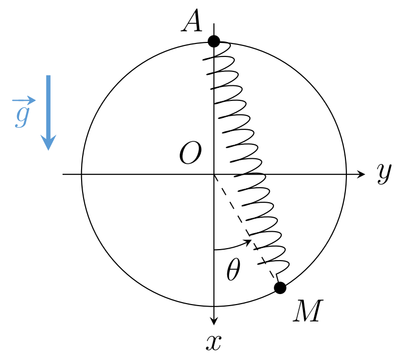
TD M3 – Encore un oscillateur

Exercice 1 – Étude d'un oscillateur

On considère la situation représentée par le schéma ci-contre, dans laquelle une particule de masse m peut se déplacer, sans frottement, sur un cercle vertical de centre O et de rayon a. Elle est reliée au point A le plus haut du cercle par un ressort idéal de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. On note θ l'angle orienté défini sur $]-\pi, \pi]$, formé entre l'axe (Ox) et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.



1. Déterminer le nombre de coordonnées utiles pour étudier le mouvement du point M, c'est-à-dire le nombre de degrés de liberté du système.
2. Faire un bilan des forces en rappelant quelles forces sont conservatives ou non.
3. Déduire des questions précédentes la loi physique adaptée à l'étude de ce mouvement.

Mise en équation

4. Déterminer la longueur AM en fonction de θ, en remarquant que l'angle entre l'axe (Ox) et le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est $\theta/2$.
5. Montrer que l'énergie potentielle totale du point M vérifie une relation de la forme :

$$\frac{\mathcal{E}_\mathrm{p}(\theta)}{\mathcal{E}_0} = -\frac{mg}{ka}\cos\theta + 2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\ell_0}{2a}\right)^2 = \xi(\theta),$$

où $\mathcal{E}_0$ est une constante à déterminer.

Étude de la courbe d'énergie potentielle

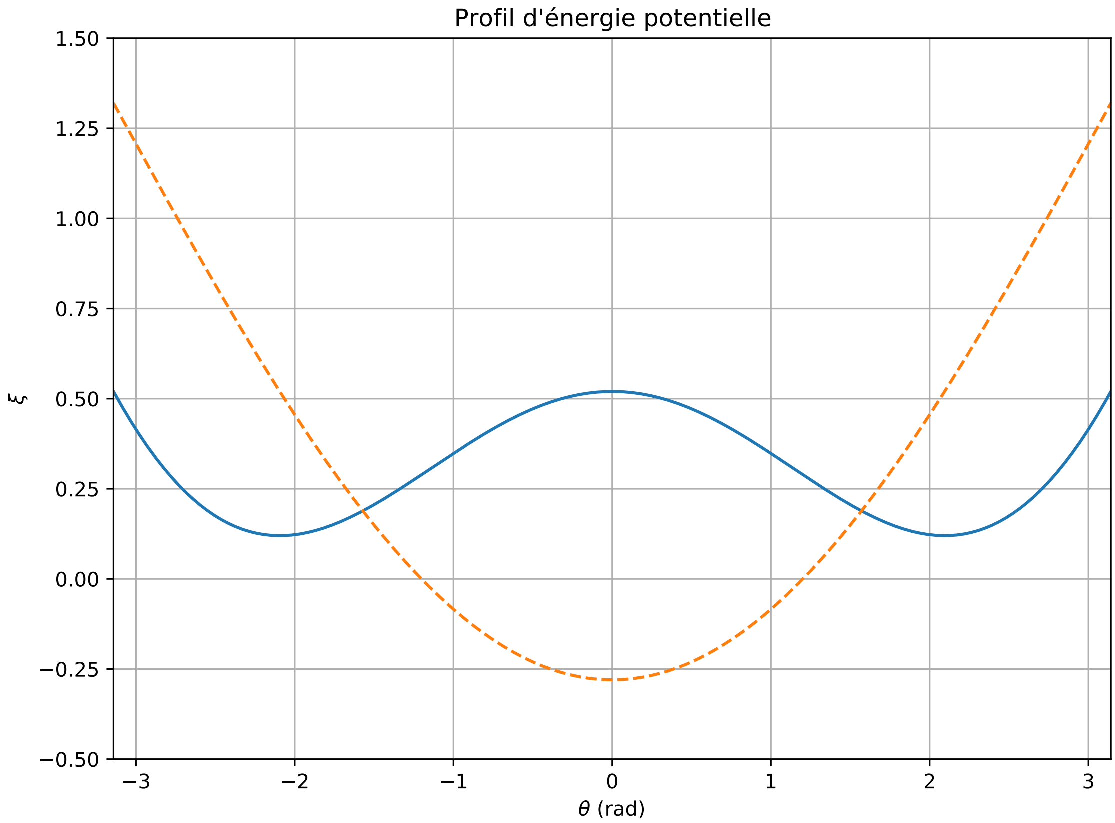
On se place dans le cas où $\dfrac{\ell_0}{2a} = 0{,}4$ et on pose $\eta = \dfrac{mg}{ka}$.

6. On suppose que $\eta < 1 - \dfrac{\ell_0}{2a}$. Montrer qu'il y a alors trois positions d'équilibre qui vérifient :

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \text{ ou } \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\ell_0}{2a(1-\eta)}$$

Les courbes d'énergie potentielle correspondant à $\eta = 0{,}2$ et $\eta = 1{,}0$ sont représentées ci-dessous.

7. Attribuer à chaque courbe du diagramme la valeur de η correspondante.
8. En déduire graphiquement la stabilité des positions d'équilibre de la question 6.



Petites oscillations au voisinage de $\theta = 0$

On choisit la valeur de η parmi les deux précédentes de sorte que la position $\theta = 0$ soit stable.

9. Exprimer l'énergie mécanique du système puis établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ.

10. Pour des oscillations de faible amplitude au voisinage de $\theta = 0$, linéariser cette équation à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 pour se ramener à l'équation d'un oscillateur harmonique dont on exprimera la pulsation propre en fonction de k, m, ℓ_0 et a.