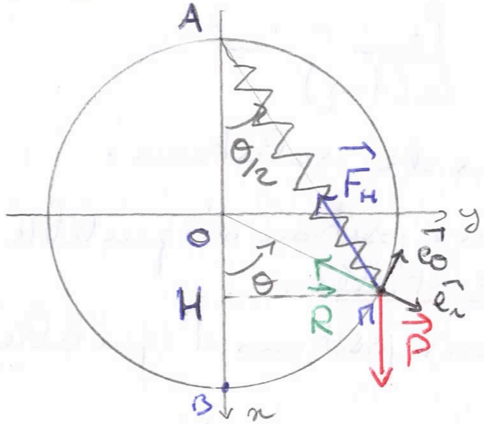
Exercice 2.

1. Puisque le système évolue sur un cercle, la connaissance de $\theta(t)$ suffit à décrire l'évolution du système. Il s'agit d'un mvt à 1 degré de liberté.

2. Bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta})$
- Réaction : $\vec{R} = \vec{R_N} = R_N\,\vec{e_r}$
- Force de rappel : $\vec{F_H}$ (pas nécessaire de l'exprimer)

Le poids et la force de rappel sont des forces conservatives, la réaction normale du support ne travaille pas. Il n'y a pas de frottement : le mouvement est conservatif.



3. Puisque l'énergie mécanique est conservée, le théorème de l'énergie mécanique est le plus adapté ici.

4. Dans le triangle OHΠ rectangle en H

$$H\Pi = a\sin\theta = 2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

puis dans le triangle AHΠ rectangle en H

$$\boxed{A\Pi = \frac{H\Pi}{\sin\frac{\theta}{2}} = 2a\cos\frac{\theta}{2}}$$

(on peut aussi remarquer que AΠB est rectangle en Π)

5. L'énergie potentielle totale comprend l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{pp}$ et l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{pe}$:

$$\mathcal{E}_{pp} = mga(1-\cos\theta) + \text{cste}' = -mga\cos\theta + \text{cste}''$$

$$\mathcal{E}_{pe} = \frac{1}{2}k\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right)^2 + \text{cste}'''$$

d'où :

$$\mathcal{E}_p = -mga\cos\theta + \frac{1}{2}k\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right)^2 + \text{cste}$$

$$= ka^2\left(-\frac{mg}{ka}\cos\theta + 2\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{l_0}{2a}\right)\right) + \text{cste}$$

En choisissant $\mathcal{E}_0 = ka^2$ et cste $=0$

on retrouve bien :

$$\boxed{\frac{\mathcal{E}_p(\theta)}{\mathcal{E}_0} = -\frac{mg}{ka}\cos\theta + 2\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{\ell_0}{2a}\right)^2}$$

6. Les positions d'équilibres sont telles que

$\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} = 0$, ce qui revient à $\frac{d\xi(\theta)}{d\theta} = 0$

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{mg}{ka}\sin\theta - 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{\ell_0}{2a}\right)$$

$$= 2\frac{mg}{ka}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{\ell_0}{2a}\right)$$

En posant $\eta = \frac{mg}{ka}$, on obtient

$$\frac{d\xi}{d\theta} = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\times(\eta - 1) + \frac{\ell_0}{2a}\right)$$

$\frac{d\xi}{d\theta}$ est nul si $\sin\frac{\theta}{2} = 0$ ou

$$(\eta - 1)\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\ell_0}{2a}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\ell_0}{2a(1-\eta)}$$

Sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$,

$\sin\frac{\theta}{2} = 0$ admet une solution : $\theta = 0$

$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\ell_0}{2a(1-\eta)}$ admet deux solutions

$$\theta = \pm 2\arccos\left(\frac{\ell_0}{2a(1-\eta)}\right)$$

(on a bien $\left|\frac{\ell_0}{2a(1-\eta)}\right| < 1$ car $\eta < 1 - \frac{\ell_0}{2a}$)

Il existe bien 3 positions d'équilibre sur $]-\pi, \pi]$ définies par :

$$\boxed{\sin\frac{\theta}{2} = 0 \quad \text{et} \quad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{\ell_0}{2a(1-\eta)}}$$

7. Pour $\eta = 1{,}0$, la condition $\eta < 1 - \frac{\ell_0}{2a}$ n'est pas respectée et

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\ell_0}{2a(1-\eta)}$$

n'admet pas de solution.

$\eta = 1$: une position d'équilibre : courbe en pointillés.

$\eta = 0{,}2$: trois positions d'équilibre : courbe pleine

8.

η	0,2	1,0
$\sin\frac{\theta}{2} = 0$	instable	stable.
$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{l_0}{2a(1-\eta)}$	stables	

9. $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ avec, dans le cas où $\eta = 1$:

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2$$

$$\mathcal{E}_p = k a^2 \left(-\cos\theta + 2\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{l_0}{2a}\right)^2 \right)$$

Puisque le mouvement est conservatif $\mathcal{E}_m =$ cste et $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$. Calculons chaque terme :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \frac{1}{2} m a^2 \, 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = m a^2 \dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dt} = k a^2 \left[\dot{\theta}\sin\theta + 2 \times \cancel{2} \times \left(-\frac{\dot{\theta}}{\cancel{2}} \sin\frac{\theta}{2}\right) \times \left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{l_0}{2a}\right) \right]$$

$$= k a^2 \dot{\theta} \left(\sin\theta - 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{l_0}{2a}\right)\right).$$

En simplifiant par $a^2\dot{\theta}$, $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$ s'écrit

$$m\ddot{\theta} + k\left(\sin\theta - 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{l_0}{2a}\right)\right) = 0$$

En remarquant que $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ et en divisant par m, on obtient finalement

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\frac{l_0}{a}\sin\frac{\theta}{2} = 0.}$$

10. Au voisinage de $\theta = 0$, $\sin\frac{\theta}{2} \simeq \frac{\theta}{2}$

d'où $$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{k l_0}{2ma}\theta = 0}$$

On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k l_0}{2ma}}}$$