TD M4 – Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique
Correction

Exercice 1 – Opérations vectorielles

1. **1.a.** $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\-5\end{pmatrix}$

   1.b. $\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}6\\-2\\4\end{pmatrix} = \vec{0}$

   1.c. $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = 5$

   1.d. $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = -5$

2. En cartésien :

   2.a. $\vec{e_x} \wedge (2\vec{e_x} + 3\vec{e_y}) = 3\vec{e_z}$

   2.b. $(5\vec{e_y} \wedge 2\vec{e_z}) \wedge \vec{e_x} = \vec{0}$

   2.c. $(2\vec{e_z} \wedge \vec{e_x}) \cdot \vec{e_x} = 0$

   En cylindrique :

   2.d. $3\vec{e_\theta} \wedge (\vec{e_z} + 3\vec{e_r}) = 3\vec{e_r} - 9\vec{e_z}$

   2.e. $\vec{e_z} \wedge (\vec{e_r} \cdot \vec{e_\theta}) = \vec{0}$

   2.f. $(2\vec{e_z} \wedge \vec{e_\theta}) \wedge (\vec{e_r} + 3\vec{e_\theta}) = -6\vec{e_z}$

   En sphérique :

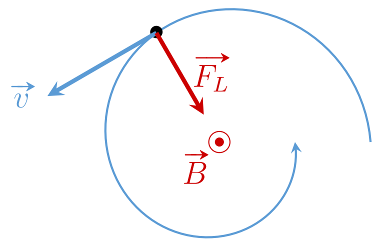
   2.g. $\vec{e_\theta} \wedge 2\vec{e_r} = -2\vec{e_\varphi}$

   2.h. $(3\vec{e_\theta}+\vec{e_\varphi})\wedge(2\vec{e_r}-\vec{e_\theta}) = -6\vec{e_\varphi}+2\vec{e_\theta}+\vec{e_r}$

   2.i. $\vec{e_r} \cdot (-\vec{e_r} \wedge 2\vec{e_\varphi}) = 0$

Exercice 2 – Chambre à bulles

1. On raisonne sur la trajectoire 1. L'accélération de la particule est dirigée vers l'intérieur de la courbure : par application du PFD, la force de Lorentz qui dévie la particule l'est aussi (la résistance du fluide est opposée à la vitesse : elle ne dévie pas la particule, elle la ralentie). On a donc, à un instant quelconque :



Avec q la charge de la particule, la composante magnétique de la force de Lorentz s'exprime

$$\vec{F_L} = q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Or $\vec{v} \wedge \vec{B}$ et $\vec{F_L}$ sont de sens opposés, d'où $q < 0$ dans ce cas : **la trajectoire 1 est associée aux particules de charge négative**.

Le même raisonnement montre que, **la trajectoire 2 est associée aux particules de charge positive**.

Les particules qui ont un mouvement rectiligne ne sont pas déviées : la composante magnétique de la force de Lorentz est nulle, ce qui est possible si leur charge est nulle : **la trajectoire 3 est associée aux particules neutres**.

2. Dans le fluide, le mouvement des particules n'est pas uniforme, les particules ralentissent. Or, localement, le rayon de la trajectoire (ou gyrodius, rayon de Larmor, ou encore rayon cyclotron) s'exprime

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

Si la vitesse diminue, le rayon décroit aussi ce qui explique l'allure des trajectoires en spirale observées.

Exercice 3 – Sélecteur de vitesse

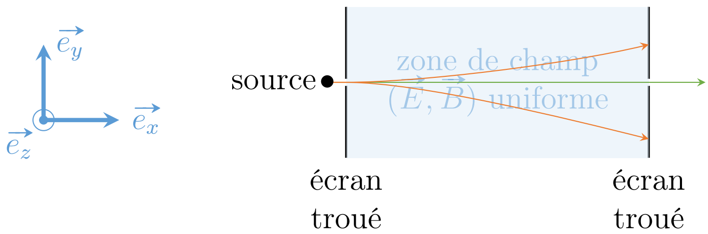
1. Si le vecteur vitesse d'une particule de charge $q \neq 0$ reste inchangé, le mouvement est rectiligne et uniforme. D'après le principe d'inertie, cela n'est possible que si le système est pseudo-isolé. En présence d'un champ électromagnétique uniforme et stationnaire, les composantes électriques et magnétiques de la force de Lorentz doivent se compenser, soit

$$\overrightarrow{F_L} = \overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \quad q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right) = 0, \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{E} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}.$$

Avec les notations de l'énoncé, on doit donc avoir

$$\boxed{E_0 = v_0 B_0.}$$

2. On peut imaginer le montage représenté ci-dessous : les particules n'ayant pas la vitesse souhaitée sont déviées dans la zone de champ uniforme et ne passent pas à travers le deuxième trou (trajectoires oranges).



Exercice 4 – Expérience de Millikan

1. Une gouttelette d'huile est soumise à
   - son poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$;
   - la poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi}_A = -\frac{\rho_a}{\rho} m\overrightarrow{g}$;
   - la force de frottements visqueux $\overrightarrow{f} = -\alpha R\overrightarrow{v}$;
   - la composante électrique de la force de Lorentz $\overrightarrow{F_E} = q\overrightarrow{E}$.

   On peut comparer le poids et la poussée d'Archimède : on trouve que le poids est $\rho/\rho_a = 10^3$ fois plus intense que la poussée d'Archimède : on peut la négliger. Les autres forces sont nécessaire pour expliquer les résultats expérimentaux.

   Rq : l'expérience historique de Millikan tient compte de la poussée d'Archimède. Ses mesures sont en effet suffisamment précises pour que l'« oubli » de la poussée d'Archimède conduise à une erreur systématique mesurable.

2. On applique le PFD à une goutte d'huile de masse m et de charge q en l'absence de champ électrique, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \alpha R\vec{v}.$$

En régime permanent $\vec{v} = \vec{v_0} = \overrightarrow{\text{cste}}$, d'où

$$\boxed{\vec{v_0} = \frac{m}{\alpha R}\vec{g}.}$$

3. La masse d'une gouttelette de rayon R s'exprime

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho,$$

d'où, en injectant dans l'expression de la vitesse limite et après calcul

$$\boxed{R = \sqrt{\frac{3\alpha v_0}{4\pi\rho g}}.}$$

A.N. : $R = 1{,}1\,\mu\text{m}$.

4. Le PFD s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha R}{m}\vec{v} = \vec{g}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{\vec{v_0}}{\tau}, \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{\alpha R}.$$

Avec la condition initiale $\vec{v}(0) = \vec{0}$, la résolution conduit à

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v_0}\left(1 - e^{-t/\tau}\right).}$$

5. Pour ralentir la chute des gouttelettes, la composante électrique de la force de Lorentz doit être opposée au poids, donc dirigée vers le haut. Puisque la charge des particules est négative, avec $\vec{F_E} = q\vec{E}$, le champ électrique doit être dirigé vers le bas. Le champ électrique est toujours dirigé des zones de fort potentiel vers les zones de faible potentiel : **le potentiel électrique de la plaque V_1 est plus élevé que celui de la plaque V_2** :

$$\boxed{U = V_1 - V_2 > 0.}$$

On en déduit

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{U}{d}\vec{e_z}.}$$

6. On applique le PFS : le poids et la composante électrique de la force de Lorentz se compensent, d'où

$$mg = \frac{qU}{d} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{q = \frac{mgd}{U} = \frac{4\pi R^3\rho g d}{3U}.}$$

A.N. : $q_1 = 4{,}8 \times 10^{-19}\,\text{C}$ et $q_2 = 3{,}2 \times 10^{-19}\,\text{C}$.

7. On remarque que les charges des gouttelettes sont des multiples entiers de la charge élémentaire e. En effet, $q_1 = 3e$ et $q_2 = 2e$.
Cette expérience illustre la **quantification de la charge électrique**.

Exercice 5 – Cyclotron

1. Dans le dee le champ électrique est nul : un proton est soumis à la seule composante magnétique de la force de Lorentz qui ne travaille pas. Le TPC s'écrit donc

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathcal{E}_\mathrm{c} = \text{cste.}}$$

Dans un dee, le mouvement est uniforme.

2. Dans un dee, la vitesse d'un proton est constante : dans le repère de Frenet, son accélération s'exprime

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_N}.$$

Il n'est soumis qu'à la composante magnétique de la force de Lorentz

$$\overrightarrow{F_B} = evB\overrightarrow{e_N}.$$

Le PFD s'écrit donc

$$m\frac{v^2}{R} = evB, \quad \text{d'où} \quad \boxed{R = \frac{mv}{eB}.}$$

Le temps passé dans un dee est le temps nécessaire pour parcourir un demi cercle de rayon R à la vitesse v, soit

$$\boxed{\tau = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m}{eB}}.$$

Ce temps ne dépend pas de la vitesse des protons.

3. Pour accélérer les protons de manière optimale, il faut que le champ $\vec{E}$ soit orienté dans le sens de la vitesse des protons et que sa norme soit maximale. En négligeant le temps mis par les protons pour passer d'un dee à l'autre devant le temps de vol dans les dee car $a \ll R$, c'est le cas si la période de la tension u correspond 2τ, d'où

$$\boxed{f = \frac{eB}{2\pi m} = \frac{\omega_c}{2\pi},}$$

où $\omega_c = eB/m$ est la pulsation cyclotron.
A.N. : $f = 23\,\mathrm{MHz}$.

4. Entre les dee, le champ $\vec{E}$ est uniforme et quasi stationnaire lors du passage des protons car $a \ll R$. Le TEC appliqué à un proton entre l'instant où il sort d'un dee et celui ou il rentre dans le suivant s'écrit

$$\Delta\mathcal{E}_\mathrm{c} = eU_m,$$

car le champ $\vec{E}$ est toujours orienté de manière à accélérer la particule. À chaque passage entre les dee, l'énergie cinétique d'un proton augmente de eU_m. La vitesse initiale est négligeable : après n passages dans la zone d'accélération, l'énergie cinétique d'un proton vaut neU_m. On en déduit

$$\boxed{v_n = \sqrt{\frac{2neU_m}{m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{R_n = \sqrt{\frac{2nmU_m}{eB^2}}.}$$

5. Après un tour, $n = 2$, d'où $R_2 = 6{,}1\,\text{cm}$.
   Après dix, tours, $n = 20$ d'où $R_{20} = 19\,\text{cm}$.
6. On a directement
   $$\boxed{\mathcal{E}_{c,N} = \frac{R_N^2 e^2 B^2}{2m}.}$$
   A.N. : $\mathcal{E}_{c,N} = 2{,}1 \times 10^{-12}\,\text{J} = 13\,\text{MeV}$.
7. On reprend l'expression de R_n et on isole n. Pour $n = N$, on obtient
   $$\boxed{N = \frac{eB^2 R_N^2}{2mU_m}.}$$
   A.N. : $N \approx 66$, soit 33 tours.
   La durée totale de l'accélération est $N\tau = 1{,}4\,\mu\text{s}$.

Exercice 6 – Oscilloscope analogique

1. Entre les plaques, le champ électrique est supposé uniforme. Il vaut :
   $$\vec{E} = -\frac{U}{d}\vec{e_x}.$$
   Les électrons de charge $-e$ sont soumis à la seule composante électrique de la force de Lorentz, d'où
   $$\boxed{\vec{F_E} = \frac{eU}{d}\vec{e_x}.}$$
2. On applique le PFD à un électron de masse $m = \text{cste}$
   $$m\vec{a} = \vec{F_E}.$$
   On intègre deux fois tenant compte des conditions initiales $\vec{v}(0) = v_0\vec{e_z}$ et $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$:
   $$\vec{v}(t) = \frac{eU}{md}t\vec{e_x} + v_0\vec{e_z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM}(t) = \frac{eU}{2md}t^2\vec{e_x} + v_0 t\vec{e_z},$$
   d'où
   $$x(t) = \frac{eU}{2md}t^2 \quad \text{et} \quad z(t) = v_0 t.$$
   On en déduit finalement
   $$\boxed{x(z) = \frac{eU}{2mdv_0^2}z^2.}$$
3. L'électron sort de la zone de champ en $z = D$, soit au bout d'un temps $t_D = D/v_0$. On en déduit
   $$K = \begin{cases} x_K = \dfrac{eUD^2}{2mdv_0^2} \\ z_K = D \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{v_K} = \begin{cases} \dot{x}_K = \dfrac{eUD}{mdv_0} \\ \dot{z}_K = v_0 \end{cases}$$

4. En négligeant le poids en dehors de la zone de champ ou $\vec{E} = \vec{0}$, l'électron n'est soumis à aucune force : le système est donc (quasi) isolé. Le référentiel d'étude est bien galiléen, donc le principe d'inertie s'applique : **l'électron a un mouvement rectiligne uniforme**.
5. En dehors de la zone de champ, on a $\vec{a} = \vec{0}$, d'où, en prenant une nouvelle origine des temps à l'instant où l'électron passe par K,

$$\vec{v}(t) = \dot{x}_K \vec{e_x} + \dot{z}_K \vec{e_z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM}(t) = (\dot{x}_K t + x_K)\vec{e_x} + (\dot{z}_K t + z_K)\vec{e_x}.$$

L'électron arrive sur l'écran à l'instant $t_P = L/v_0$, d'où

$$\boxed{X_P = \dot{x}_K t_P + x_K = \frac{eUD}{2mdv_0^2}(2L + D).}$$

On remarque que la déviation de l'électron est proportionnelle à U : la mesure de la déviation de l'électron permet de déterminer simplement la tension U. Pratique pour un oscilloscope !