

TD O3 – Propagation d'un signal

Correction

Exercice 1 – Quelques signaux

1. Par définition, une onde progressive sinusoïdale s'écrit sous la forme

$$s(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0).$$

En utilisant la périodicité de la fonction sinus, le signal de l'énoncé se réécrit

$$s(x, t) = 6 \sin(3,2 \times 10^3 \pi t - 5\pi x + \pi).$$

De plus, on a $\sin \theta = \cos(\pi/2 - \theta)$, d'où

$$s(x, t) = 6 \cos\left(3,2 \times 10^3 \pi t - 5\pi x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Finalement, par identification, on trouve

$$\omega = 1,0 \times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad k = 15,7 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}, \quad A = 6 \quad \text{et} \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Avec $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$, $k = 2\pi/\lambda$ et $c = \omega/k$, on trouve

$$f = 1,6 \times 10^3 \text{ Hz}, \quad T = 625 \mu\text{s}, \quad \lambda = 0,4 \text{ m} \quad \text{et} \quad c = 640 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. Le signal oscille entre $-0,6$ et $1,6$. Son amplitude est donc $(1,6 + 0,6)/2 = 1,1$ et sa valeur moyenne (l'offset) est $(1,6 - 0,6)/2 = 0,5$.

Sa période est $2 \mu\text{s}$ donc sa fréquence est $0,5 \text{ MHz}$ et sa pulsation vaut $\pi \times 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Enfin, le signal est décalé vers la droite de $0,25 \mu\text{s}$, ce qui correspond à un retard de phase $-2\pi \times 0,25 \mu\text{s}/2 \mu\text{s} = -\pi/4$.

Finalement, le signal s'écrit

$$s(t) = 0,5 + 1,1 \cos\left(\pi \times 10^6 t - \frac{\pi}{4}\right).$$

3. Graphiquement, on détermine la durée de la perturbation :

$$\Delta t = 0,3 \text{ s}.$$

La longueur de la perturbation s'en déduit :

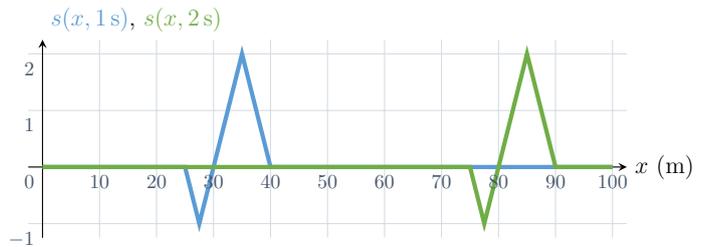
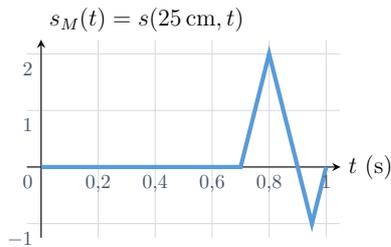
$$\Delta x = c\Delta t = 15 \text{ cm}.$$

Le signal en M est reçu avec un retard temporel de $AM/c = 0,5 \text{ s}$, d'où l'allure représentée ci-dessous à gauche.

Pour représenter $s(x, t = 1 \text{ s})$:

- le front d'onde (le point de la perturbation à *gauche* de l'oscillogramme) se trouve à l'abscisse $x = c(1\text{ s} - 0,2\text{ s}) = 40\text{ cm}$;
- la longueur de la perturbation est $\Delta x = 15\text{ cm}$;

En n'oubliant pas de représenter le symétrique de la perturbation par rapport à l'axe vertical lors du passage de la représentation temporelle à la représentation spatiale, on obtient l'allure représentée en bleu ci-dessous à droite. L'allure de la corde en $t = 2\text{ s}$ est identique, décalée vers la droite de 50 cm .



4. La distance maximale d est telle que l'écho d'un cri arrive avant le suivant. La durée nécessaire pour recevoir l'écho est $2d/c$, avec $c \approx 340\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ la célérité du son dans l'air. En négligeant la durée d'un cri devant l'intervalle t entre deux cris car $70\text{ ms} \gg 3\text{ ms}$, on en déduit

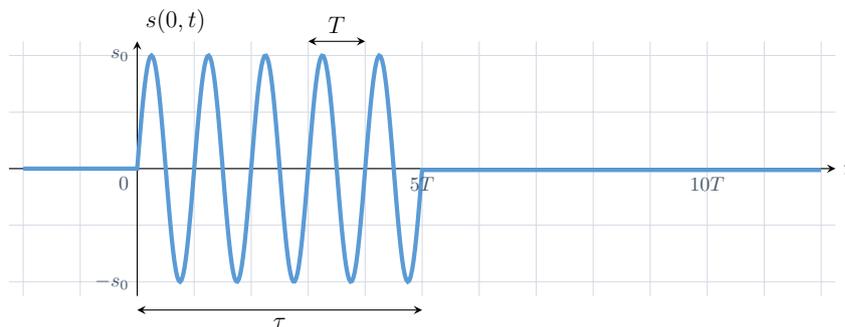
$$t = \frac{2d}{c}, \quad \text{d'où} \quad d = \frac{ct}{2} = 11,9\text{ m}.$$

Sans négliger la durée τ d'un cri devant l'intervalle entre deux cris et pour éviter que l'écho d'un cri ne se superpose au cri émis suivant, on a

$$d = \frac{c(t - \tau)}{2} = 11,4\text{ m}.$$

Exercice 2 – Train d'onde

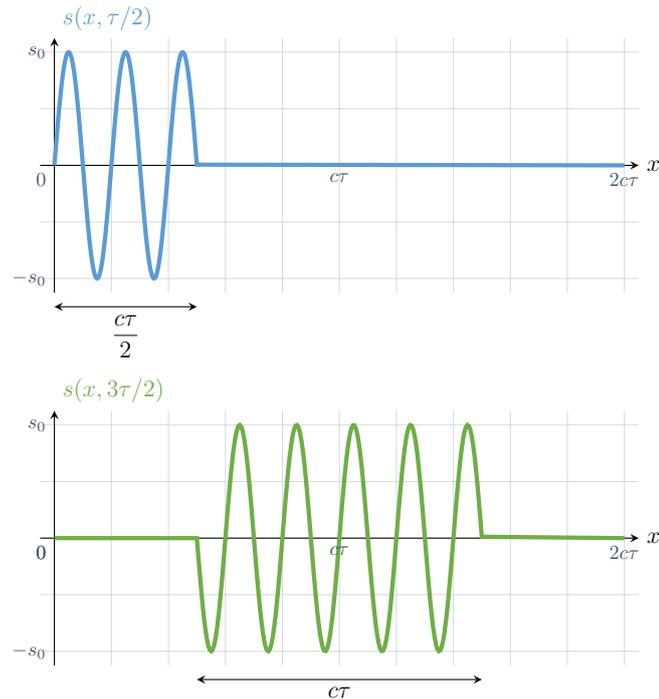
1. On représente le signal associé au train d'onde en $x = 0$.



2. Pour $s(x, \tau/2)$: le front d'onde se situe en $x = c\tau/2$ et la longueur Δx du train d'onde vaut

$$\Delta x = c\tau.$$

Sans oublier de représenter le symétrique du train d'onde lors du passage de la représentation temporelle à la représentation spatiale, on obtient l'allure représentée en bleu ci-dessous. L'allure de $s(x, 3\tau/2)$ est identique, avec un décalage de $c\tau$ vers la droite.



3. L'onde se propage dans le sens des x croissants, avec x positif, à la célérité c . Le front d'onde se situe en $x = ct$, tandis que l'arrière de l'onde se trouve en $x = \max(0, c(t - \tau))$. On a donc

$$s(x, t) = \begin{cases} s_0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) & \text{si } \max(0, c(t - \tau)) \leq x \leq ct \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3 – Cuve à ondes

1. On mesure la distance entre plusieurs creux de vague au niveau de l'axe (Ox). Pour six longueurs d'onde, on mesure 2,5 cm, ce qui correspond à 8,9 cm dans la réalité. On en déduit

$$\lambda \approx 1,5 \text{ cm.}$$

2. On en déduit directement

$$c = \lambda f \approx 27 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3. Pour $x > 0$, l'onde se propage dans le sens des x croissants, d'où

$$s(x, t) = A \cos(\omega t - kx),$$

avec $\omega = 1,1 \times 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $k = 4,2 \times 10^2 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$.

Pour $x < 0$, l'onde se propage dans le sens des x décroissants, d'où

$$s(x, t) = A \cos(\omega t + kx).$$

4. Il s'agit d'une atténuation géométrique : l'énergie de l'onde se répartit sur des cercles de plus en plus grands, l'amplitude décroît quand on s'éloigne de la source. Avec les outils de deuxième année, on peut montrer que l'amplitude de l'onde décroît en $1/\sqrt{r}$, avec r la distance à la source.

Exercice 4 – Position et date d'un séisme

1. On note t_0 la date du séisme situé à la distance δ de la station de mesure. Les ondes S arrivent avec un retard de $c_S\delta$, d'où $t_S = t_0 + \delta/c_S$. Le raisonnement est identique pour les ondes P, on obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} t_S = t_0 + \frac{\delta}{c_S} \\ t_P = t_0 + \frac{\delta}{c_P} \end{cases}$$

On soustrait les deux équations pour éliminer t_0 et on isole δ , d'où

$$\delta = \frac{c_P c_S}{c_P - c_S} (t_S - t_P).$$

De même, on soustrait les deux équations après avoir multiplié la première par c_S et la deuxième par c_P , d'où

$$t_0 = \frac{c_P t_P - c_S t_S}{c_P - c_S}.$$

2. Grâce à la station 1, on sait que le séisme est situé sur un cercle de rayon δ_1 centré sur la station. En ajoutant les informations de la station 2, on situe le séisme à l'intersection des cercles de rayons δ_1 et δ_2 centrés sur les station 1 et 2, ce qui donne au plus deux points. La troisième station permettra d'éliminer l'un des deux points, ce qui permet finalement de localiser l'épicentre du séisme. C'est aussi sur ce principe que repose le fonctionnement du GPS.

Exercice 5 – Interférogrammes

La figure de gauche est obtenue avec des trous d'Young : en effet la figure de diffraction forme une tache et des anneaux circulaires caractéristiques de la figure de diffraction associée à un trou. Le diamètre de la tache centrale (tache d'Airy) est d'environ $d_A = 1,6$ cm. Puisque $d_A \ll D$, l'approximation des petits angles donne

$$d_A \approx 2D\theta,$$

où $\theta = 1,22\lambda/d$ est le demi-angle de l'ouverture angulaire de la tache d'Airy. On en déduit le diamètre des trous

$$d \approx 1,22 \times \frac{2\lambda D}{d_A} \approx 40 \mu\text{m}.$$

De plus, on mesure un interfrange $i = 1,9$ cm/6. Pour des trous d'Young séparés d'une distance a (dans l'air, $n = 1$), la différence de marche en un point d'abscisse x de l'écran vaut $\delta(x) = ax/D$ et l'interfrange i est tel que $\delta(i)/\lambda = 1$. On en déduit

$$a = \frac{\lambda D}{i} \approx 84 \mu\text{m}.$$

Le raisonnement est similaire pour la figure de droite obtenue avec des fentes d'Young. On estime la largeur totale l de la tache centrale de diffraction à environ 4 cm et l'interfrange i à 3 cm/8. On en déduit

$$\boxed{d \approx \frac{2\lambda D}{l} \approx 13 \mu\text{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{a = \frac{\lambda D}{i} \approx 71 \mu\text{m}.}$$

Exercice 6 – Effet Doppler

1. L'abscisse $x(t)$ de l'ambulance est $x(t) = v_0 t$, éventuellement à une constante près qui dépend de l'origine choisie pour le temps, mais sans importance pour la suite. Soit un instant t_0 quelconque correspondant à l'émission d'un bip par l'ambulance. Le suivant est émis à l'instant $t_0 + T$.

Le piéton reçoit les bip avec un décalage temporel qui dépend de la position de l'ambulance à l'instant où un bip est émis : il reçoit le premier bip à l'instant $t_1 = t_0 + x(t_0)/c$, puis le suivant à $t_2 = t_0 + T + x(t_0 + T)/c$. Or la période T' correspond à l'intervalle entre deux bips successifs reçus par le piéton, soit $T' = t_2 - t_1$ d'où

$$\boxed{T' = T \left(1 + \frac{v_0}{c} \right).$$

2. On a

$$f' = \frac{1}{T'} = \frac{1}{T} \frac{1}{1 + \frac{v_0}{c}} = \frac{f}{1 + \frac{v_0}{c}}.$$

On a $v_0 \ll c$ donc $v_0/c \ll 1$ et $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$ par un DL au premier ordre avec $\varepsilon \ll 1$. Finalement, avec ici $\alpha = -1$,

$$\boxed{f' \underset{\text{DL1}}{\approx} f \left(1 - \frac{v_0}{c} \right).$$

3. L'expression obtenue se généralise pour un signal sinusoïdal. L'application numérique donne $f' \approx 0,96 \text{ kHz} < f$: le son paraît **plus grave**.
4. Dans le calcul de la fréquence du signal reçu, c'est la vitesse relative de l'émetteur par rapport au récepteur qui importe. On a donc

$$\boxed{f' \approx f \left(1 - \frac{v_0 - v_P}{c} \right).$$

5. On revient au cas où $v_P = 0$ mais avec cette fois $\vec{v}_0 = -v_0 \vec{e}_x$. L'expression de f' devient

$$\boxed{f' = f \left(1 + \frac{v_0}{c} \right).$$

A.N. : $f' = 1,04 \text{ kHz} > f$: le son paraît plus aigu.

6. c correspond désormais à la célérité de la lumière dans le vide. Avec v_G la vitesse radiale de la galaxie par rapport à la Terre, on a

$$v_G \approx c \left(1 - \frac{f'}{f} \right).$$

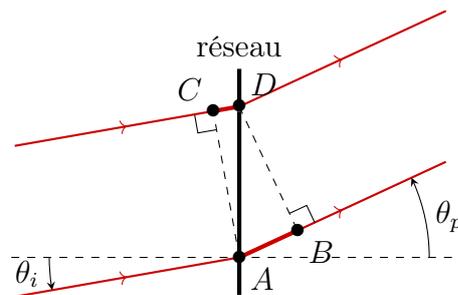
De plus, $f = c/\lambda$, d'où

$$v_G \approx c \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_G} \right).$$

A.N. : $v_G = 2,49 \times 10^3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$: on note que cette vitesse est bien plus faible que la célérité de la lumière, ce qui permet d'utiliser la formule obtenue par DL.

Exercice 7 – Formule des réseaux

1. La différence de marche δ correspond à la différence de chemin optique $(AB) - (CD)$.



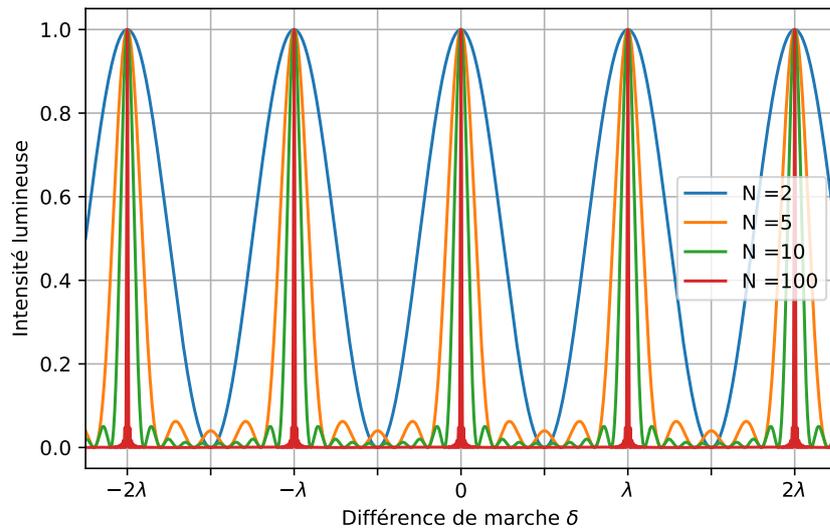
Dans le triangle ABD avec $AD = a$ et $\widehat{ADB} = \theta_p$, on a $AB = a \sin \theta_p$. De même, dans le triangle ACD , on a $CD = a \sin \theta_i$. En supposant le réseau plongé dans l'air d'indice $n = 1$, on a

$$\delta = a(\sin \theta_p - \sin \theta_i).$$

2. Les rayons qui émergent du réseau interfèrent constructivement s'ils sont en phase, c'est-à-dire si $\delta = p\lambda$, avec p un entier. On retrouve donc bien

$$a(\sin \theta_p - \sin \theta_i) = p\lambda.$$

3. On n'a considéré que deux fentes du réseau alors que la figure d'interférence résulte de la superposition cohérente de la lumière diffracté par un grand nombre de fentes. Il en résulte une figure plus complexe, avec des maxima secondaires entre deux maxima primaires. Loin des maxima primaires, les maxima secondaires tendent toutefois à disparaître quand un grand nombre de traits du réseau sont éclairés. La figure ci-dessous montre l'intensité lumineuse résultant de la superposition de N ondes issues de N traits du réseau, en fonction de la différence de marche, donc indirectement de la direction en sortie du réseau.



Exercice 8 – Fentes d'Young et diffraction

1. Le demi-angle de diffraction θ vérifie $\sin \theta = \lambda/\varepsilon = 0,009 \ll 1$: il est possible de réaliser l'approximation des petits angles. La largeur L de la tache de diffraction est telle que

$$\tan \theta \approx \theta \approx \frac{L}{2D}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{L \approx \frac{2\lambda D}{\varepsilon}}.$$

A.N. : $L = 27 \text{ mm}$: on retrouve la valeur indiquée sur le schéma.

Sur l'écran, les taches de diffractions issues de chacune des fentes sont centrées sur leur image géométrique. Puisque le faisceau incident est un faisceau parallèle qui arrive selon l'axe du dispositif, les deux figures sont décalées de a sur l'écran. Or $a = 0,4 \text{ mm} \ll L = 27 \text{ mm}$: **on peut considérer que les taches sont confondues.**

2. Il s'agit du calcul classique de la différence de marche dans le cas des fentes d'Young fait en cours. On a

$$MF_1 = \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} = D \sqrt{1 + \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2}.$$

Puisque $a \ll D$ et pour $x \ll D$, on a $\varepsilon = \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2 \ll 1$. Avec un DL1, on a $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$, d'où

$$MF_1 \underset{\text{DL1}}{\approx} D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2\right) = D + \frac{x^2}{2D} - \frac{ax}{2D} + \frac{a^2}{8D}.$$

Le calcul est identique pour MF_2 , en remplaçant $a/2$ par $-a/2$:

$$MF_2 \approx D + \frac{x^2}{2D} + \frac{ax}{2D} + \frac{a^2}{8D}.$$

On obtient finalement

$$\boxed{\delta = MF_2 - MF_1 \approx \frac{ax}{2D} - \left(-\frac{ax}{2D}\right) = \frac{ax}{D}}.$$

3. Puisque les deux ondes sont en phase en F_1 et F_2 , le déphasage en M s'exprime, en considérant l'indice de l'air égal à 1,

$$\Delta\varphi = k\delta = 2\pi \frac{ax}{\lambda D}.$$

4. Les ondes issues de F_1 et F_2 interfèrent constructivement si $\Delta\varphi = 2p\pi$, avec p un entier, c'est-à-dire aux points M d'abscisse

$$x = p \frac{\lambda D}{a}.$$

L'interfrange est donc $i = \lambda D/a$. Il y a environ $N = L/i$ franges dans la tache centrale de diffraction, soit

$$N = \frac{2a}{\varepsilon}.$$

A.N. : $N \approx 11$ et on compte effectivement environ 11 taches lumineuses dans la tache centrale de diffraction sur la figure.

5. Il y a interférence destructive si les ondes arrivent en opposition de phase, soit pour $\Delta\varphi = 2\pi \left(p + \frac{1}{2}\right)$, ce qui arrive sur l'écran aux points d'abscisse

$$x = \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda D}{a}.$$

L'intervalle entre deux franges sombres correspond toujours à l'interfrange

$$i = \frac{\lambda D}{a}.$$

A.N. : $i \approx 2,4$ mm. Sur la figure, on mesure $i \approx 2,3$ mm ce qui est proche de la valeur attendue.

Exercice 9 – Écoute musicale et interférences

1. L'onde réfléchiée doit parcourir une distance $2D$ en plus de l'onde directe, ce qui correspond à un décalage temporel

$$\tau = \frac{2D}{c}.$$

2. Le déphasage $\Delta\varphi$ entre les deux ondes vaut alors $\omega\tau$, soit

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{2fD}{c}.$$

3. Si les deux ondes arrivent en opposition de phase au niveau de l'auditeur, la surpression acoustique sera plus faible. Pour une distance D fixée, cela ne se produit que pour les fréquences telles que $\Delta\varphi = 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire pour

$$f = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{c}{2D}.$$

Pour qu'aucune de ces fréquences atténuées ne soit audible, il faut que la plus petite ($n = 0$) soit plus grande que $f_{\max} = 20$ kHz. On veut donc

$$D < \frac{c}{4f_{\max}}.$$

A.N. : $D < 4,3$ mm, ce qui revient à plaquer son oreille contre le mur : ce n'est pas réalisable en pratique!

4. En éloignant l'auditeur du mur, l'amplitude de l'onde réfléchie peut devenir suffisamment faible devant celle de l'onde directe pour que les interférences destructives n'entraînent qu'une faible diminution de la surpression acoustique : la gêne occasionnée est moindre.
5. En cas d'interférences constructives, l'amplitude de l'onde résultante est la somme des amplitudes des ondes qui se superposent, soit, pour deux ondes de même amplitude : $2A_0$.

D'après la courbe, l'amplitude maximale reçue par le micro vaut $A_{\max,\text{dB}} = 97$ dB. Par définition, on a

$$A_{\max,\text{dB}} = 20 \log \frac{2A_0}{A_{\text{ref}}} = 20 \log \frac{A_0}{A_{\text{ref}}} + 20 \log 2 = A_{0,\text{dB}} + 6 \text{ dB},$$

d'où

$$A_{0,\text{dB}} = 91 \text{ dB}.$$

6. On remarque sur la courbe que les fréquences atténuées sont séparées de $\Delta f \approx 2$ kHz. Or, d'après la question 3, cette séparation s'exprime

$$\Delta f = \frac{c}{2D}, \quad \text{d'où} \quad D = \frac{c}{2\Delta f}.$$

A.N. : $D \approx 85$ cm.

Exercice 10 – Ondes de surface

1. On mesure la longueur d'onde sur les deux photographies, de la même façon que pour l'Ex. 3.

f (Hz)	15,1	20,0	25,2	30,6	39,4	60,1
λ (cm)	1,5	1,2	0,94	0,87	0,70	0,51

2. Le coefficient de tension superficielle γ s'exprime, d'après la valeur indiquée pour l'interface air/eau, en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$: il est homogène à une force linéique, d'où $[\gamma] = \text{M} \cdot \text{T}^{-2}$. Par ailleurs on a $[\rho] = \text{M} \cdot \text{L}^{-3}$ et $[g] = \text{L} \cdot \text{T}^{-2}$, d'où

$$[\ell_c] = \sqrt{\frac{\text{M} \cdot \text{T}^{-2}}{\text{M} \cdot \text{L}^{-3} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2}}} = \left(\frac{1}{\text{L}^{-2}}\right)^{1/2} = \text{L}.$$

ℓ_c est **homogène à une longueur**.

A.N. : $\ell_c \approx 2,72 \text{ mm}$.

3. Comparons les deux termes de la relation de dispersion :

$$\frac{\frac{\gamma}{\rho} k^3}{gk} = k^2 \ell_c^2 = 4\pi^2 \frac{\ell_c^2}{\lambda^2}.$$

Ainsi :

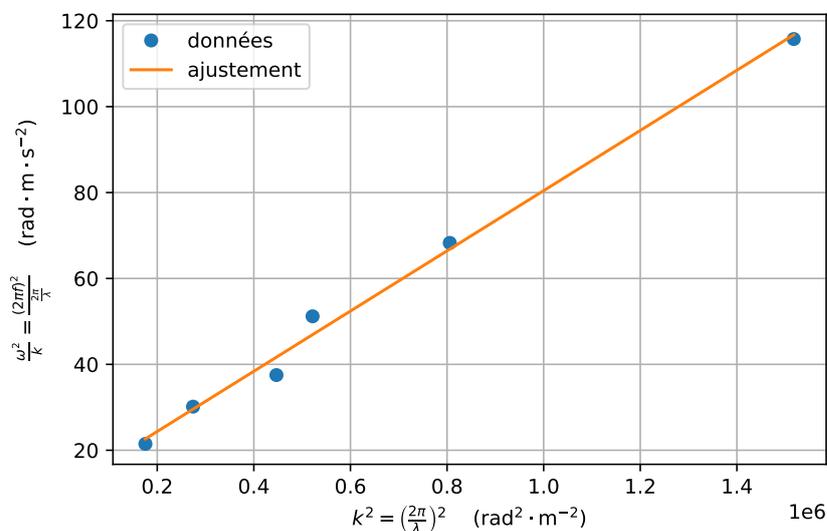
- pour des longueurs d'onde faible, c'est-à-dire pour $\lambda \ll \ell_c$, le terme $\frac{\gamma}{\rho} k^3$ domine et la relation de dispersion devient $\omega^2 \approx \frac{\gamma}{\rho} k^3$. Ce régime dominé par la tension de surface (la capillarité) correspond à celui des **ondes capillaires** ;
- pour des grandes longueurs d'onde, c'est-à-dire pour $\lambda \gg \ell_c$, le terme gk domine et la relation de dispersion devient $\omega^2 \approx gk$. Ce régime dominé par la gravité correspond à celui des **ondes de gravité**.

Les mesures réalisées dans l'expérience donnent des longueurs d'onde comparables à la longueur capillaire, ce qui correspond à la limite entre les deux régimes : les deux termes de la relation de dispersion doivent être pris en compte.

4. On a

$$\omega^2 = gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 = k \left(g + \frac{\gamma}{\rho} k^2 \right), \quad \text{d'où} \quad \frac{\omega^2}{k} = g + \frac{\gamma}{\rho} k^2.$$

ω^2/k est donc une fonction affine de k^2 , ce qui se vérifie graphiquement, avec les points de mesure aléatoirement répartis de part et d'autre de l'ajustement.



L'ajustement affine $y = ax + b$ donne $a = 7,0 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ et $b = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Le coefficient de tension superficielle s'obtient à partir du coefficient directeur de la droite avec $\gamma = \rho a = 70 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$: on obtient une valeur proche de la tension superficielle de l'eau pure à 20°C . La valeur expérimentale est très légèrement plus faible que la valeur théorique, ce qui n'est pas étonnant : la tension superficielle chute rapidement en présence d'impuretés et cette expérience est en réalité assez délicate à réaliser proprement. Par ailleurs, on vérifie $b \approx g$, même si cette expérience ne permet pas une mesure précise de g .

Rq : Il serait plus élégant de tracer $\frac{\omega^2}{gk}$ en fonction de $\frac{k^2}{\rho g}$: les valeurs numériques sur le graphe sont plus raisonnables et le coefficient directeur de la courbe donne directement γ .

Exercice 11 – Une autre famille d'ondes

- On note $y_+(x, t)$ (resp. $y_-(x, t)$) l'onde se propageant dans le sens des x croissants (resp. décroissants). On a donc

$$y_+(x, t) = a \cos(\omega t - kx + \varphi_+) \quad \text{et} \quad y_-(x, t) = a \cos(\omega t + kx + \varphi_-).$$

La somme de ses deux ondes se calcule avec la formule donnée dans l'énoncé :

$$\begin{aligned} y_+(x, t) + y_-(x, t) &= 2a \cos\left(\frac{2\omega t + \varphi_+ + \varphi_-}{2}\right) \cos\left(\frac{-2kx + \varphi_+ - \varphi_-}{2}\right) \\ &= 2a \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}\right) \cos\left(kx - \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2}\right), \end{aligned}$$

où l'on a aussi utilisé la parité de la fonction cosinus. On peut choisir les phases à l'origine φ_+ et φ_- de sorte que

$$\frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2} = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2} = \varphi$$

pour retrouver l'expression de l'énoncé. On a alors

$$y(x, t) = y_+(x, t) + y_-(x, t) \quad \text{si} \quad a = \frac{y_0}{2}.$$

- Les extrémités de la cordes situées en $x = 0$ et $x = L$ sont fixes, ce qui impose, à tout instant

$$\begin{cases} y(0, t) = 0 \\ y(L, t) = 0. \end{cases}$$

La condition en $x = 0$ impose $\varphi = \pm\pi/2$. On choisit sans perte de généralité le signe « $-$ » de manière à pouvoir réécrire $y(x, t)$ sous la forme

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t) \sin(kx).$$

La condition en $x = L$ impose $\sin(kL) = 0$, d'où $kL = n\pi$, avec $n \in \mathbb{N}$. k ne peut donc prendre que des valeurs discrètes

$$k_n = \frac{n\pi}{L}.$$

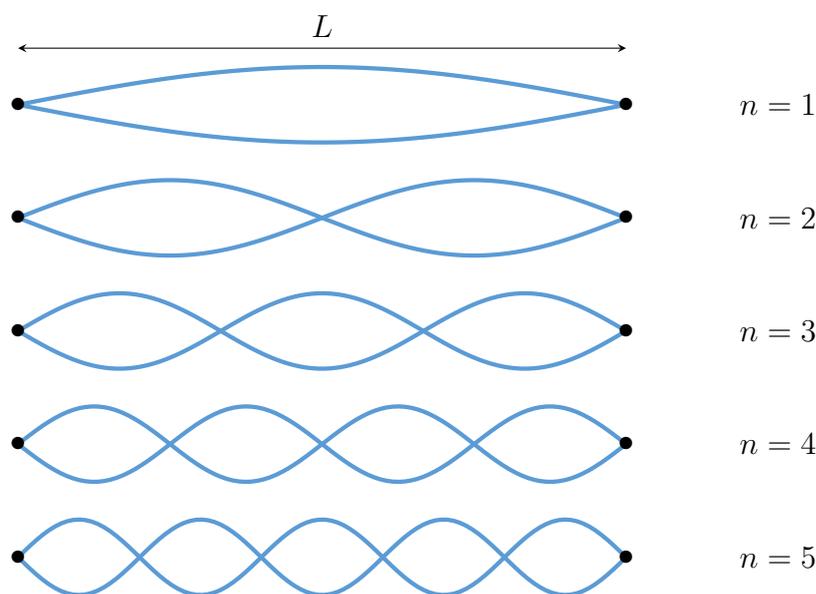
3. La relation de dispersion indique immédiatement que les valeurs de pulsation, et donc de fréquence sont quantifiées

$$\omega_n = k_n c, \quad \text{d'où} \quad \boxed{f_n = \frac{nc}{2L}}$$

Par définition, $k = 2\pi/\lambda$ donc la longueur d'onde est elle aussi quantifiée :

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$$

4. On représente les premiers modes de vibration.



Tous les instruments à cordes fonctionnent en exploitant les différents modes de vibration de cordes fixées à leurs extrémités : guitare, violon, piano, harpe. La hauteur de la note dépend notamment de la longueur de la corde, ce qui permet de changer de note en appuyant sur les frettes d'une guitare par exemple.

5. On considère tout d'abord la situation où la boule est plongée dans l'air. D'après la deuxième expérience, la boule coule dans l'eau, ce qui indique que sa masse volumique ρ est supérieure à celle de l'eau. On a donc $\rho \gg \rho_{\text{air}}$: la poussée d'Archimède subie par la boule dans l'air est négligeable devant son poids. Le PFS appliqué à la boule soumise à la tension T de la corde et à son poids $P = mg$ dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen donne $T = mg$. Par ailleurs, on remarque que la corde vibre selon le mode $n = 2$, ce qui permet d'exprimer la fréquence de vibration $f = c/L$ en utilisant les résultats de l'étude préliminaire. En injectant l'expression de la célérité indiquée dans l'énoncé, on obtient

$$f = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{mg}{\mu}}$$

Dans le cas où la boule est immergée dans l'eau, le même raisonnement s'applique en tenant compte de la poussée d'Archimède : la tension vaut alors $T' = (m - \rho_{\text{eau}}V)g$, où

V est le volume de la boule. C'est le mode $n = 5$ qui vibre, on a donc

$$f = \frac{5}{2L} \sqrt{\frac{(m - \rho_{\text{eau}}V)g}{\mu}}$$

La fréquence n'est pas modifiée au cours de l'expérience, donc

$$\frac{1}{L} \sqrt{\frac{mg}{\mu}} = \frac{5}{2L} \sqrt{\frac{(m - \rho_{\text{eau}}V)g}{\mu}}, \quad \text{d'où} \quad V = \frac{21}{25} \frac{m}{\rho_{\text{eau}}}.$$

Le volume de la boule est donné par $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, d'où finalement

$$R = \left(\frac{63}{100\pi} \frac{m}{\rho_{\text{eau}}} \right)^{1/3}.$$

A.N. : $R = 7,4 \text{ cm}$. On vérifie $\rho = 1,2 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} > \rho_{\text{eau}}$: ce qui est cohérent avec le fait que la boule est complètement immergée dans la seconde expérience.