TD T1 – Description d'un système thermodynamique
Correction

Exercice 1 – Bouteille de gaz

1. Le volume $V_{\text{ext}} = 10\,\text{m}^3$ est le volume de gaz à pression atmosphérique. Le produit PV est constant (car nRT l'est) car on s'intéresse toujours à la même quantité de gaz qui reste à la même température. On a donc

$$\boxed{V_{\text{int}} = V_{\text{ext}}\frac{P_{\text{ext}}}{P_{\text{int}}}.}$$

A.N. : $V_{\text{int}} = 0{,}050\,\text{m}^3 = 50\,\text{L}$.

2. Une fois la pression du gaz dans la bouteille réduite à $P = 1\,\text{bar}$, le gaz ne peut plus sortir de la bouteille. Le volume de gaz restant est celui de la bouteille, on ne peut donc en extraire que $V = 9{,}95\,\text{m}^3$.
3. On applique la loi des GP et avec $m = nM_{\text{Ar}}$, on trouve

$$\boxed{m = \frac{PV}{RT}M_{\text{Ar}}.}$$

A.N. : $m = 16\,\text{kg}$.

Exercice 2 – Gaz d'une lampe spectrale

1. L'hélium est un GPM, son énergie interne s'écrit

$$U(T) = \frac{3}{2}nRT.$$

Avec la loi des GP, on a $P_0V_0 = nRT$, d'où

$$\boxed{U_0 = \frac{3}{2}P_0V_0.}$$

A.N. : $U_0 = 4{,}5\,\text{mJ}$.
On a $m = nM_{\text{He}}$, d'où

$$\boxed{m = \frac{P_0V_0}{RT_0}M_{\text{He}}.}$$

A.N. : $m = 4{,}8\,\mu\text{g}$.

2. La quantité de matière et le volume du gaz restent constants, donc le quotient P/T est constant d'après la loi des GP. Avec $P_f = 1{,}05P_0$, on a

$$\boxed{T_f = 1{,}05T_0} \quad \text{et} \quad \boxed{U_f = 1{,}05U_0.}$$

Exercice 3 – Pression des pneus

Attention : le manomètre indique la différence de pression entre l'air du pneu et la pression atmosphérique : la pression dans le pneu est donc $P = P_m + P_0$, où P_m est la pression affichée par le manomètre et P_0 la pression atmosphérique.

1. Entre l'hiver et l'été, le volume et la quantité de matière de gaz sont constants, donc le quotient P/T est constant d'après la loi des GP. On a

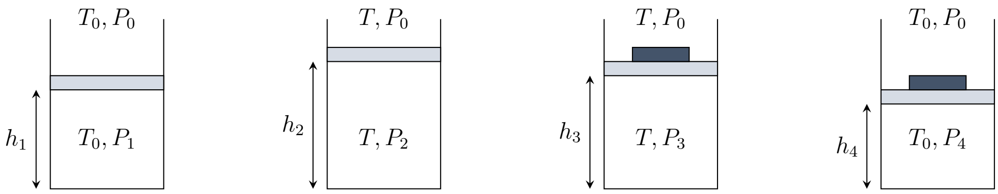
$$\frac{P_1 + P_0}{T_1} = \frac{P_2 + P_0}{T_2}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{P_2 = \frac{T_2}{T_1}(P_1 + P_0) - P_0.}$$

A.N. : $P_2 = 2{,}5\,\mathrm{bar}$.

2. La variation de pression entre l'hiver et l'été est $\Delta P = 0{,}5\,\mathrm{bar}$, soit une augmentation de $\Delta P/(P_1 + P_0) = 17\,\%$ entre l'hiver et l'été : il faudra ajuster la pression des pneus lors du changement de saison.

Exercice 4 – Gaz parfait dans une enceinte

1. À l'équilibre, la température du gaz dans le piston est égale à la température extérieure.



2. La condition d'équilibre mécanique du piston dans l'état (1) implique

$$0 = (P_1 - P_0)S - mg, \quad \text{d'où} \quad P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}.$$

D'autre part, la loi des GP s'écrit, avec $V = Sh_1$

$$P_1 S h_1 = nRT_0.$$

On obtient finalement

$$\boxed{h_1 = \frac{nRT_0}{P_0 S + mg}.}$$

Dans l'état (2), seule la température passe de T_0 à T, d'où

$$\boxed{h_2 = \frac{T}{T_0} h_1.}$$

Dans l'état (3), on remplace m par $M + m$, d'où

$$\boxed{h_3 = \frac{nRT}{P_0 S + (M + m)g}.}$$

Finalement, dans l'état (4), la température repasse à T_0, d'où

$$\boxed{h_4 = \frac{T_0}{T} h_3.}$$

Exercice 5 – Masse volumique de l'air

1. Avec la loi des GP, on a

$$\boxed{V_m = \frac{V}{n} = \frac{RT}{P}.}$$

A.N. : $V_m = 22{,}4\,\mathrm{L}$.

2. L'air est composé à hauteur d'environ 80 % de diazote et 20 % de dioxygène.
La masse d'un atome d'azote dont le noyau est formé de 14 nucléons est $m_\mathrm{N} = 14m$. La masse molaire de l'azote est donc $M_\mathrm{N} = 14m\mathcal{N}_A$. La molécule de diazote $\mathrm{N_2}$ est formée de deux atomes d'azote, d'où $M_{\mathrm{N_2}} = 28m\mathcal{N}_A$. De même, on a $M_{\mathrm{O_2}} = 32m\mathcal{N}_A$.
La masse molaire de l'air correspond à la moyenne des masses molaires du diazote et du dioxygène, pondérée par leur proportions respectives, d'où

$$\boxed{M_\mathrm{air} = 0{,}8M_{\mathrm{N_2}} + 0{,}2M_{\mathrm{O_2}} = 28{,}8m\mathcal{N}_A.}$$

A.N. : $M_\mathrm{air} = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

3. Avec $m = nM_\mathrm{air}$ et la loi des GP, on obtient

$$\boxed{v = \frac{V_m}{M_\mathrm{air}} = \frac{RT}{PM_\mathrm{air}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\rho = \frac{1}{v}.}$$

A.N. : $v = 0{,}77\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$ et $\rho = 1{,}3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Exercice 6 – Crevaison

On note D le diamètre de la roue et d le diamètre de la section du pneu. On assimile le pneu à un cylindre de section $\pi d^2/4$ et de hauteur πD. Le volume du pneu est donc

$$V = \frac{\pi^2}{4}Dd^2.$$

Le pneu est gonflé quand il contient un volume V de $\mathrm{CO_2}$ à la pression $P = 7{,}5\,\mathrm{bar}$. En appliquant la loi des GP et avec $m = n(M_\mathrm{C} + 2M_\mathrm{O})$, on obtient

$$\boxed{m = \frac{P\pi^2Dd^2}{4RT}(M_\mathrm{C} + 2M_\mathrm{O}).}$$

A.N. : $m = 14{,}5\,\mathrm{g}$ à $300\,\mathrm{K}$. Il faut donc prévoir une cartouche de $16\,\mathrm{g}$ au moins.

Exercice 7 – Étude d'un compresseur

1. Dès que le piston redescend, la soupape s se ferme. On considère le système fermé formé par l'air contenu dans le cylindre C qui subit une transformation à température constante. Le produit PV est donc constant d'après la loi des GP Dans l'état initial, le cylindre contient un volume V_M d'air à la pression P_a. Au moment où la soupape s' s'ouvre, l'air du cylindre est à la pression du réservoir P_0 et le volume du cylindre est V_1', d'où

$$\boxed{V_1' = \frac{P_a}{P_0}V_M.}$$

2. On considère le système fermé formé par l'air contenu dans le cylindre et le réservoir, qui passe de $(P_0, V_1' + V)$ à $(P_1, V_m + V)$ à température constante. Toujours avec $PV = \text{cste}$, on a

$$P_1 = \frac{V_1' + V}{V_m + V} P_0.$$

En remplaçant V_1' par son expression, on obtient

$$\boxed{P_1 = \frac{P_a V_M + P_0 V}{V_m + V}.}$$

3. La pression n'augmente plus dans le réservoir si, quand le volume minimal V_m du piston est atteint, la pression dans le cylindre est inférieure ou égale à la pression $P_{\max}$ dans le réservoir. La soupape s' s'ouvre donc encore si

$$\boxed{V_1' \geqslant V_m.}$$

En utilisant la relation de la question 1, la pression dans le réservoir lors de l'ouverture de s' s'écrit

$$P = P_a \frac{V_M}{V_1'} \leqslant P_a \frac{V_M}{V_m} = P_{\max},$$

d'où

$$\boxed{P_{\max} = \frac{V_M}{V_m} P_a.}$$

4. Le même raisonnement qu'aux questions 1 et 2 conduit à

$$P_2 = \frac{P_a V_M}{V_m + V}\left(1 + \frac{V}{V_m + V}\right) + P_0 \left(\frac{V}{V_m + V}\right)^2,$$

puis

$$P_3 = \frac{P_a V_M}{V_m + V}\left(1 + \frac{V}{V_m + V} + \left(\frac{V}{V_m + V}\right)^2\right) + P_0 \left(\frac{V}{V_m + V}\right)^3.$$

Par récurrence, on obtient

$$P_n = P_0 \left(\frac{V}{V + V_m}\right)^n + \frac{P_a V_M}{V + V_m} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{V}{V + V_m}\right)^i.$$

En utilisant

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

on trouve finalement

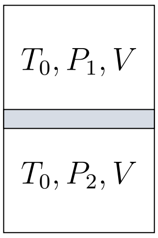
$$\boxed{P_n = P_0 \left(\frac{V}{V + V_m}\right)^n + \frac{P_a V_M}{V + V_m} \frac{1 - \left(\frac{V}{V+V_m}\right)^n}{1 - \frac{V}{V+V_m}}.}$$

5. Puisque $V < V + V_m$, on a
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{V}{V+V_m}\right)^n = 0,$$
d'où
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{V_M}{V_m}P_a = P_{\max}.}$$

6. A.N. : $P_1 = 1{,}05\,\text{bar}$ et $P_{\max} = 25\,\text{bar}$.

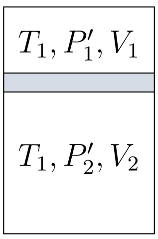
Exercice 8 – Piston en équilibre

1. Initialement, le dispositif est le suivant.



La masse du piston est σS, avec S la surface du piston. La condition d'équilibre mécanique du piston donne
$$\boxed{P_2 = P_1 + \sigma g.}$$

2. Quand la température passe à T_1, le dispositif devient celui représenté ci-dessous, sans que l'on sache nécessairement pour l'instant si le piston est monté ou descendu.



La conservation du volume total de l'enceinte donne un première relation :
$$V_1 + V_2 = 2V.$$
La conservation de la quantité de matière de gaz dans chaque compartiment donne deux relations supplémentaires en utilisant la loi des GP
$$\frac{P_1V}{T_0} = \frac{P_1'V_1}{T_1} \quad \text{et} \quad \frac{P_2V}{T_0} = \frac{P_2'V_2}{T_1}.$$
Finalement, la condition d'équilibre mécanique du piston donne la quatrième relation :
$$P_2' = P_1' + \sigma g.$$

On doit donc résoudre le système

$$\boxed{\begin{cases} V_1 + V_2 = 2V \\ P_2' = P_1' + \sigma g \\ \dfrac{P_1 V}{T_0} = \dfrac{P_1' V_1}{T_1} \\ \dfrac{P_2 V}{T_0} = \dfrac{P_2' V_2}{T_1} \end{cases}}$$

La résolution (...) conduit à une équation du second ordre vérifiée par V_1 :

$$aV_1^2 + bVV_1 + cV^2 = 0,$$

avec

$$a = \sigma g T_0, \quad b = (P_1 + P_2)T_1 - 2\sigma g T_0, \quad \text{et} \quad c = -2P_1 T_1.$$

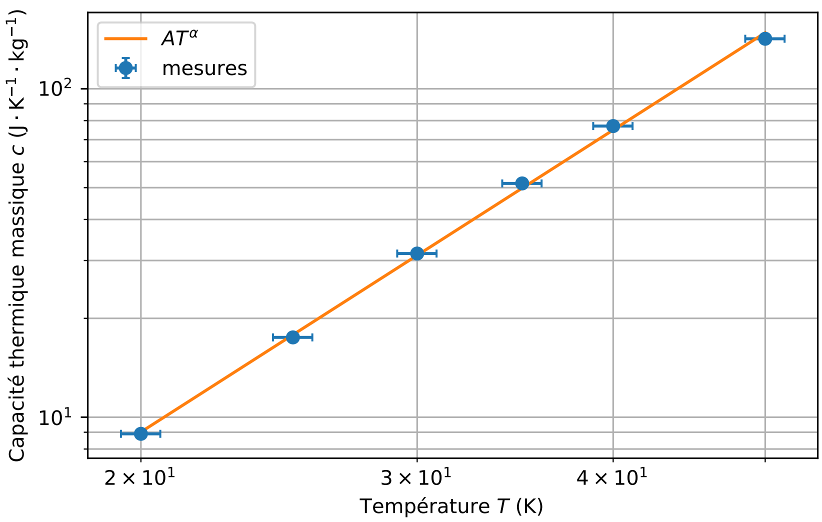
La résolution conduit à deux racines réelles, dont l'une est négative. On garde la solution positive

$$V_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} V.$$

A.N. : $V_1 = 0{,}9V$ et $V_2 = 1{,}1V$.

Exercice 9 – Capacité thermique d'un métal

1. L'application numérique donne $C_m = 3R \approx 25\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$.
2. On commence par représenter les données dans un graphique en échelle log/log avec la commande `plt.loglog(T,c)`. Représenter les barres d'erreur nécessite de ruser un peu, c'est pourquoi le code ci-dessous n'utilise pas directement cette commande. On obtient le graphe ci-dessous, où les points de mesure semblent alignés, ce qui laisse penser à un loi de puissance et qui explique l'expression proposée dans l'énoncé.

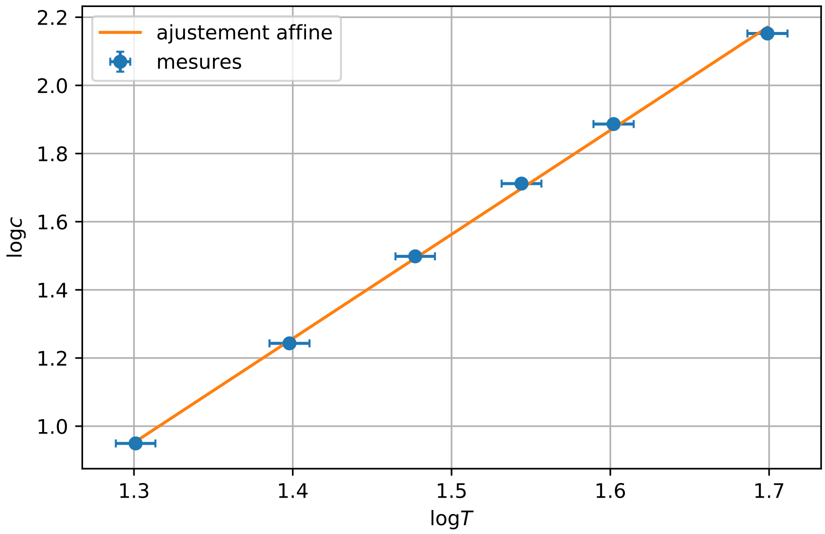


Si le modèle proposé dans l'énoncé est valide, on a en effet

$$\log c = \log\left(AT^\alpha\right) = \log A + \alpha \log T.$$

L'ajustement affine se fait avec la fonction `np.polyfit(x,y,1)`. La propagation des incertitudes est un peu fastidieuse mais se fait bien en appliquant les méthodes vues en TP avec la méthode Monte-Carlo. On obtient le graphique représenté ci-dessous, avec des points qui semblent aléatoirement répartis de part et d'autre de la droite et une droite comprise dans les barres d'incertitude-type : l'ajustement affine parait raisonnable et le modèle est valide dans la gamme de températures considérées. Tous calculs faits, on obtient

$$\alpha = 3{,}1 \pm 0{,}1 \quad \text{et} \quad A = (1{,}0 \pm 0{,}5) \times 10^{-3}\,\mathrm{J\cdot K^{-4}\cdot kg^{-1}}.$$



L'exposant α est compatible avec l'exposant 3 attendu dans le modèle de Debye où

$$c(T) = AT^3,$$

qui décrit la capacité thermique des métaux à basse température, avec un écart normalisé $E_n = 1 < 2$.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

########################
# DONNÉES EXPÉRIMENTALES
########################
T  = np.array([20,25,30,35,40,50])          # température (K)
uT = T * .05 / np.sqrt(3)                   # incertitude-type
c  = np.array([8.9,17.5,31.5,51.5,77,142])  # capacité thermique massique (
uc = c * .05 / np.sqrt(3)                   # incertitude-type

###########
# AJUSTEMENT
###########
logT = np.log10(T)
```

```python
logc = np.log10(c)
ulogT, ulogc = [], []        # propagation des incertitudes
for k in range(len(T)):      # sur chaque valeur mesurée
    T_sim = np.random.normal(T[k],uT[k], 10000)
    c_sim = np.random.normal(c[k],uc[k], 10000)
    ulogT.append(np.std(np.log10(np.array(T_sim)), ddof=1))
    ulogc.append(np.std(np.log10(np.array(c_sim)), ddof=1))
ulogT, ulogc = np.array(ulogT), np.array(ulogc)

alpha, logA = np.polyfit(logT, logc, 1) # ajustement affine

a_sim, b_sim = [], []        # estimation de l'incertitude-type
for i in range(10000):       # sur les paramètres de l'ajustement
    logT_sim = np.random.normal(logT, ulogT)
    logc_sim = np.random.normal(logc, ulogc)
    a, b = np.polyfit(logT_sim, logc_sim, 1)
    a_sim.append(a)
    b_sim.append(b)
ualpha, ulogA = np.std(a_sim, ddof=1), np.std(b_sim, ddof=1)

A  = 10**logA
logA_sim = np.random.normal(logA, ulogA, 10000)
uA = np.std(10**logA_sim, ddof=1)

############################
# REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES
############################
plt.figure(figsize=(6,4)) # Échelle log/log
plt.errorbar(T, c, xerr=uT, yerr=uc, fmt="o",capsize=2, label="mesures")
plt.plot(T, A * T**alpha, label="$AT^\\alpha$")
plt.xscale('log', nonposx='clip')
plt.yscale('log', nonposy='clip')
plt.grid(which="both")
plt.xlabel("Température $T$ (K)")
plt.ylabel("Capacité thermique massique $c$ ($\\rm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^
plt.legend(loc="upper left")

plt.figure(figsize=(6,4)) # tracé de log(c) = f(log(T)) pour l'ajustement
plt.errorbar(logT, logc, xerr=ulogT, yerr=ulogc, fmt="o", capsize=2, label=
plt.plot(logT, alpha*logT + logA, label="ajustement affine")
plt.grid(which="both")
plt.xlabel("$\log T$")
plt.ylabel("$\log c$")
plt.legend(loc="upper left")

#########################
# AFFICHAGE DES RÉSULTATS
#########################
print("alpha = {:.1f} +/- {:.1f}".format(alpha, ualpha))
print("A = ({:.1f} +/- {:.1f}).10^-3 USI".format(A*1e3, uA*1e3))
```

3. On calcule la variation d'énergie interne ΔU, avec $c(T) = AT^\alpha \neq$ cste :

$$\Delta U = \int_{T_1}^{T_2} mc(T)\mathrm{d}T = \int_{T_1}^{T_2} mAT^\alpha \mathrm{d}T = \frac{mA}{\alpha+1}\left(T_2^{\alpha+1} - T_1^{\alpha+1}\right).$$

La puissance $\mathcal{P}$ de chauffage est constante, d'où

$$\boxed{\Delta t = mA\frac{T_2^{\alpha+1} - T_1^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\mathcal{P}}.}$$

A.N. : $\Delta t \approx 2{,}2 \times 10^2\,\mathrm{s} = 3{,}7\,\mathrm{min}$.

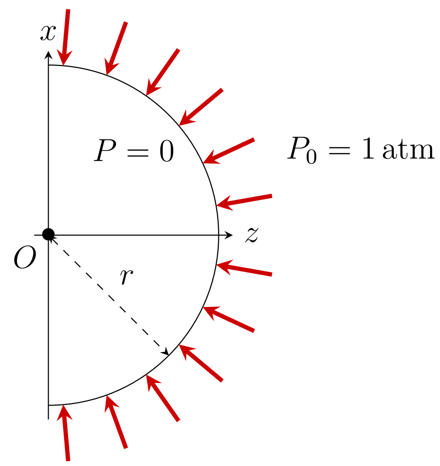
Exercice 10 – Hémisphères de Magdebourg

1. La force nécessaire pour séparer les deux demi-cylindres ne dépend que de la section du cylindre, donc de son diamètre. En effet les forces exercées sur les parois courbes du cylindre sont dirigées perpendiculairement à l'axe du cylindre et n'empêchent pas la séparation.
2. La résultante des forces qui s'exerce sur la section du cylindre est simplement $P_0\pi r^2$. Pour séparer les cylindres, il faut exercer une force au moins aussi intense mais de sens opposé, d'où

$$\boxed{F = P_0\pi r^2.}$$

A.N. : $F = 20\,\mathrm{kN}$, ce qui correspond à l'équivalent du poids d'une masse de 2 tonnes.

3. Soit $\vec{e_z}$ le vecteur unitaire normal au plan équatorial séparant les deux hémisphères. Par symétrie autour de l'axe $\vec{e_z}$, la résultante des forces de pression sera dirigée selon l'axe $\vec{e_z}$: on ne s'intéresse qu'à la projection des forces de pression selon $\vec{e_z}$.
On considère l'hémisphère représenté ci-contre. En coordonnées sphériques, l'élément de surface orienté est $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = r\mathrm{d}\theta \times r\sin\theta \mathrm{d}\varphi\vec{e_r}$. La résultante des forces de pression sur cet élément de surface est alors $\mathrm{d}\vec{F} = -P_0\overrightarrow{\mathrm{d}S}$.



On projette sur $\overrightarrow{e_z}$ et on intègre de $\theta = 0$ à $\pi/2$ et de $\varphi = 0$ à 2π pour avoir la résultante des forces de pression sur l'hémisphère :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{e_z} &= \iint \mathrm{d}\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{e_z} \\
&= -\int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} P_0 r^2 \sin\theta \cos\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \\
&= -P_0 r^2 \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \mathrm{d}\theta \right) \underbrace{\left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \right)}_{2\pi} \\
&= -2\pi P_0 r^2 \left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = -P_0 \pi r^2
\end{aligned}$$

On obtient $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{e_z} = -P_0 \pi r^2$. Il faudra donc la même force pour séparer les deux hémisphères que pour séparer les deux demi-cylindres.