Chapitre E5 – Filtrage linéaire

Plan du cours

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

→ Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal périodique.
→ Calculer la valeur efficace d'un signal sinusoïdal.
→ Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.
→ Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1.
→ Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.
→ Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les comportements asymptotiques des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.
→ Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.

Questions de cours

→ Donner la définition de la valeur moyenne et de la valeur efficace d'un signal périodique $s(t)$. Donner, puis retrouver la valeur moyenne de $\cos^2(\omega t)$ ou $\sin^2(\omega t)$.
→ Représenter le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1 donnée par le colleur.
→ Établir l'expression et/ou le spectre du signal de sortie d'un filtre dont la fonction de transfert ou le diagramme de Bode est donné, pour une entrée dont l'expression ou le spectre est donné (App. 4 et 5).
→ Donner la forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas et/ou passe-haut du premier ordre (Doc. 4).

Documents

Document 1 – Décomposition en série de Fourier

Tout signal périodique de fréquence f_s peut s'écrire sous la forme d'un **développement en série de Fourier** :

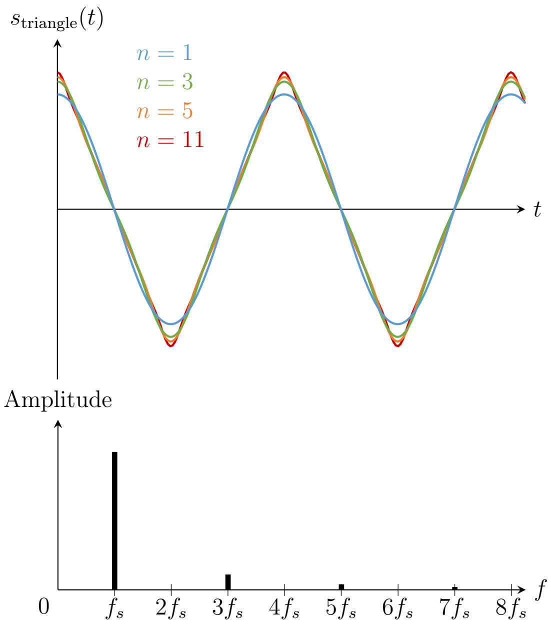
$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(2\pi n f_s t + \varphi_n), \text{ où}$$

- S_0 est la composante continue du signal ;
- f_s et S_1 caractérisent le **mode fondamental** ;
- les composantes suivantes sont les **harmoniques de rang** n.

sciences.univ-nantes.fr

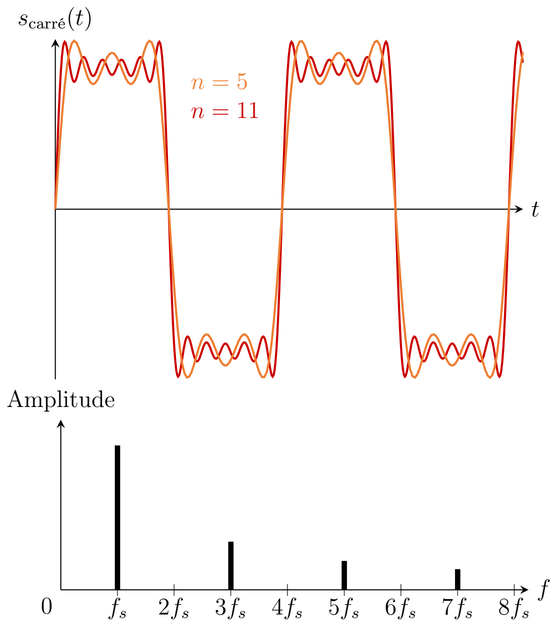
Signal triangle

$$s_{\text{triangle}}(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{\substack{n>0 \\ \text{impair}}} \frac{1}{n^2} \cos(2\pi n f_s t)$$



Signal carré

$$s_{\text{carré}}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n>0 \\ \text{impair}}} \frac{1}{n} \sin(2\pi n f_s t)$$



En utilisant le même nombre d'harmoniques, la décomposition (partielle) en série de Fourier donne de moins bons résultats pour le signal carré que pour le signal triangle. En effet la contribution de la n-ième harmonique est en $1/n$ pour le carré, alors qu'elle est en $1/n^2$ pour le triangle : les composantes de fréquences élevées sont nécessaires pour bien décrire les discontinuités du carré.

Cette décomposition se généralise pour un signal quelconque. On parle alors de transformée de Fourier et le spectre du signal est un spectre continu. Les oscilloscopes utilisés en TP peuvent calculer le spectre du signal mesuré avec un algorithme performant, dit FFT (fast Fourier transform).

3Blue1Brown

Document 2 – Musique !

En musique, on peut obtenir des effets sonores variés avec des filtres passe-haut, passe-bas, passe-bande, etc. Le son de la guitare électrique est amplifié à l'aide de composants non-linéaires pour obtenir la distorsion si caractéristique. Certaines techniques de compression de fichiers, comme le format MP3, éliminent une partie des fréquences du signal pour limiter leur taille.

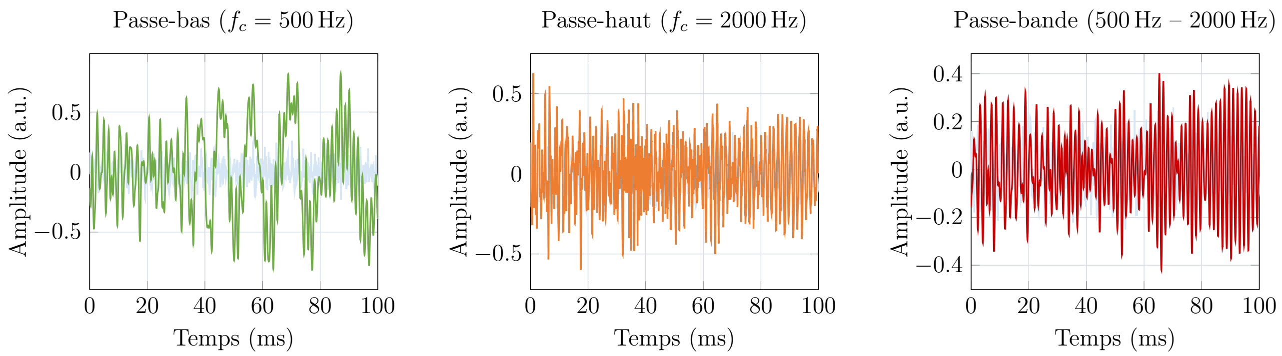


FIGURE 1 – Allure du signal associé au titre *Hey Brother* de Avicii, au voisinage de la 50$^{\text{ème}}$ seconde du morceau. Le signal original, représenté en clair sur chaque graphique, est soumis à différents filtres.

Document 3 – GW150914

La première détection directe d'onde gravitationnelle du 14 septembre 2015, associée à l'évènement GW150914, est remarquable car le signal avait une amplitude suffisante pour être distingué à l'œil nu, après un « simple » filtrage du signal issu du détecteur. Le spectre du signal brut présente de nombreuses composantes parasites associées à l'appareil lui même : 60 Hz du secteur américain, vibrations mécaniques, etc. Un premier filtrage est réalisé directement sur le spectre du signal brut et permet d'obtenir le signal, encore bruité, représenté en clair. Finalement, le signal historique est obtenu en appliquant un filtre passe-bande d'ordre élevé.

gw-openscience.org

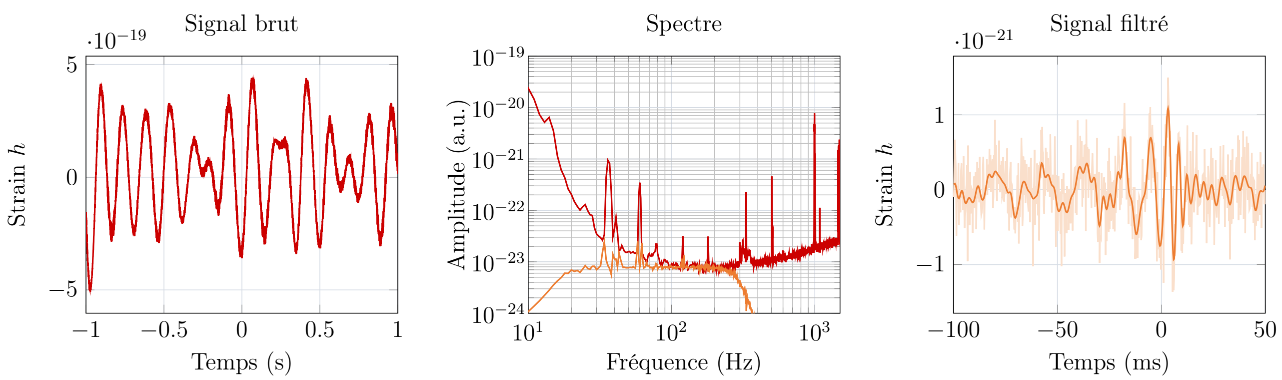
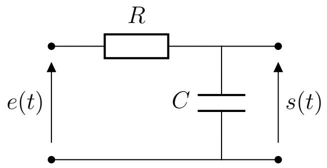


FIGURE 2 – Filtrage du signal associé à l'évènement GW150914. Les courbes représentées en rouge sont associées au signal brut, directement issu du détecteur. Celles en orange correspondent au signal filtré.

Document 4 – Filtres d'ordre 1

<table>
<tr><th>Passe-bas</th><th>Passe-haut</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$</td><td>$$\underline{H}(j\omega) =$$</td></tr>
<tr><td>Diagramme en amplitude

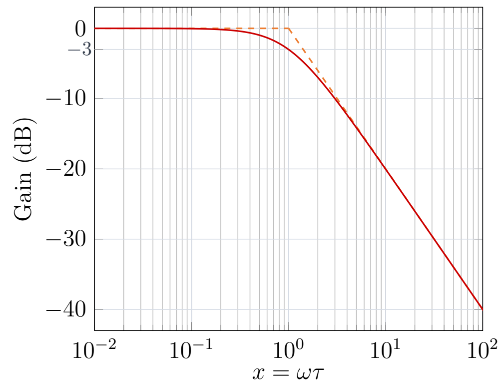
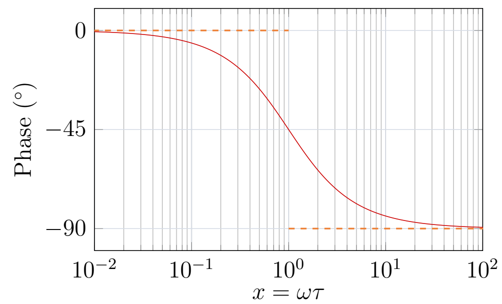



Diagramme en phase
</td><td>Diagramme en amplitude

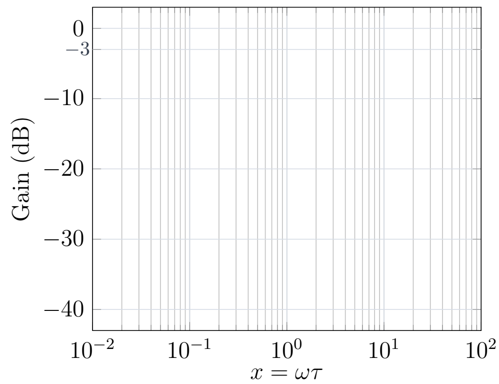
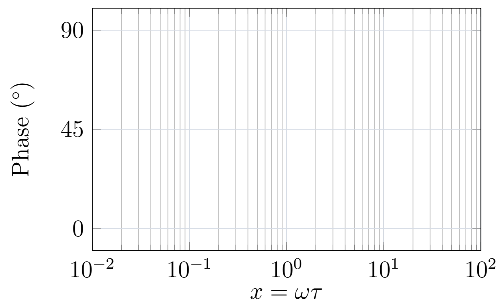
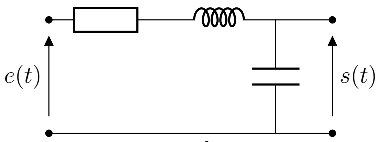



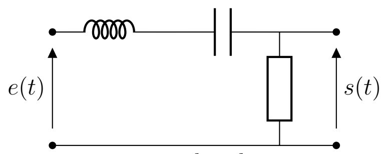
Diagramme en phase
</td></tr>
</table>

Il existe aussi des filtres passe-haut et passe-bas d'ordre plus élevés, qui présentent l'avantage de posséder des asymptotes de pentes plus élevée : cela en fait des filtres plus sélectifs. Avec des circuits plus complexes, il est également possible d'obtenir des filtres **passe-bande** ou **coupe-bande**.

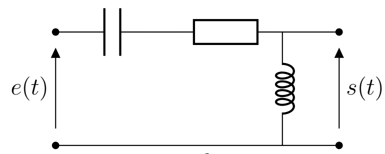
Le circuit RLC série étudié au Chap. E4 peut par exemple être utilisé comme filtre passe-bas, passe-bande, ou passe-haut.



passe-bas



passe-bande



passe-haut

Les filtres passe-bas et passe-haut ainsi obtenus peuvent être résonants ou non, et ne doivent pas être confondus avec le filtre passe-bande

Des opérations de filtrage sont couramment utilisées dans le domaine des télécommunications, par exemple pour limiter le volume de stockage de certaines informations et ainsi faciliter leur transport. Il permet aussi de « nettoyer » un signal bruité de manière à en extraire le signal d'intérêt (Doc. 3).

python Extraction du signal GW150914

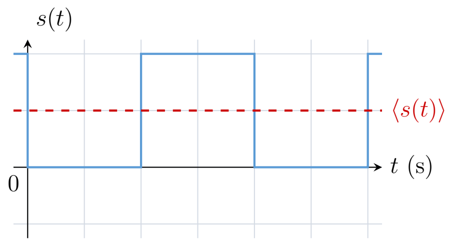
chapE5-filtrage_musique_et_GW.ipynb

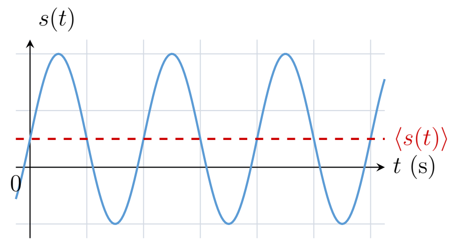
1 Signaux périodiques

Un signal $s(t)$ est périodique s'il existe une période T minimale telle que $s(t+T) = s(t)$.

1.1 Valeur moyenne

La valeur moyenne d'un signal s'interprète bien graphiquement.





Définition

La **valeur moyenne** d'un signal périodique $s(t)$, notée $\langle s(t) \rangle$, est définie par

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \mathrm{d}t.$$

Rq : $\langle s(t) \rangle$ ne dépend pas de t_0. Le choix de t_0 est donc arbitraire : on prend la valeur qui nous arrange (souvent 0) !
Rq : Dans le cas d'un signal échantillonné sur une période, on approche la valeur moyenne par

$$\langle s(t) \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} s_k.$$

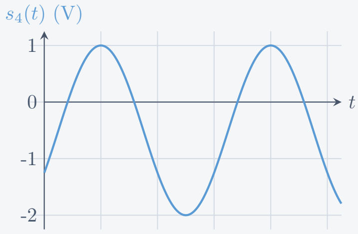
Quand le nombre N d'échantillons devient très grand, cette expression est équivalente à la précédente.

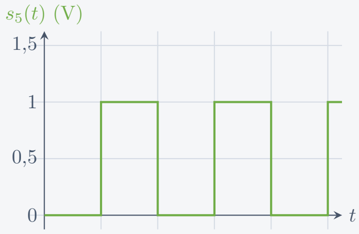
Application 1 – Valeur moyenne

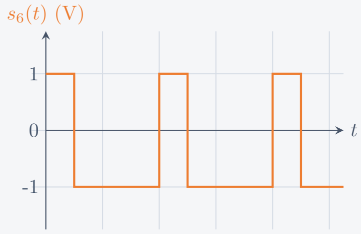
1. Rappeler l'expression de la période T d'un signal sinusoïdal de pulsation ω.
2. Exprimer, puis calculer la valeur moyenne des signaux suivants :
   - $s_1(t) = S_0 + S_1 \cos(\omega t)$;
   - $s_2(t) = S_0 + \dfrac{S_1}{2}(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))$;
   - $s_3(t) = S_0 + S_1 \cos(\omega t + \varphi) + S_2 \cos(2\omega t)$,

   où $S_0 = 0{,}5\,\mathrm{V}$, $S_1 = 1\,\mathrm{V}$ et $S_2 = 0{,}25\,\mathrm{V}$. Commenter.

3. Donner la valeur moyenne des signaux représentés ci-dessous.







4. L'image ci-contre montre l'écran d'un des GBF utilisés en TP. Identifier le menu qui permet de modifier directement la valeur moyenne du signal généré.

Propriété

La valeur **moyenne** d'un **signal sinusoïdal** est **nulle**.

$$\langle \cos(\omega t) \rangle = \langle \sin(\omega t) \rangle = \langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = 0.$$

1.2 Valeur efficace

La valeur efficace d'un signal permet de simplifier les bilans d'énergie dans un circuit alimenté par une source de tension alternative. Supposons que l'on souhaite calculer la puissance moyenne reçue par une résistance R alimentée par une tension variable $u(t)$.

En convention récepteur, la puissance instantanée reçue par la résistance s'écrit $\mathcal{P}_J = u(t) \times i(t)$, d'où en utilisant la loi d'Ohm $\mathcal{P}_J = u^2(t)/R$. On calcule alors la valeur moyenne de la puissance reçue :

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \left\langle \frac{1}{R} u^2(t) \right\rangle = \frac{1}{R} \left\langle u^2(t) \right\rangle = \frac{1}{R} \Bigg(\underbrace{\sqrt{\langle u^2(t) \rangle}}_{u_{\text{eff}}} \Bigg)^2 = \frac{u_{\text{eff}}^2}{R}.$$

D'un point de vue énergétique, tout se passe en moyenne comme si la résistance était alimentée par une tension continue $u_{\text{eff}} = \sqrt{\langle u^2(t) \rangle}$.

Définition

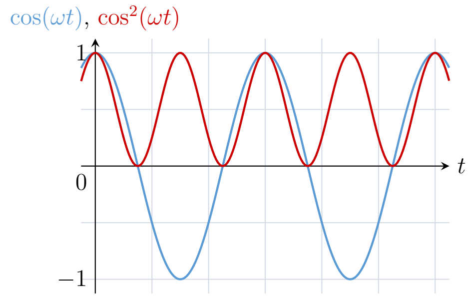
La **valeur efficace** d'un signal périodique $s(t)$, notée s_{eff}, est définie par

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) \mathrm{d}t}.$$

Cas d'un signal sinusoïdal

On suppose que la tension $u(t)$ aux bornes de la résistance est sinusoïdale de la forme $U_0 \cos(\omega t)$. On a alors

$$\left\langle u^2(t) \right\rangle = \left\langle U_0^2 \cos^2(\omega t) \right\rangle = U_0^2 \left\langle \cos^2(\omega t) \right\rangle$$



Graphiquement, on lit $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$. Par définition de la valeur moyenne, on a

$$\left\langle \cos^2(\omega t) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \left(\left[\frac{t}{2} \right]_0^T + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right]_0^T \right) = \frac{1}{2}.$$

En utilisant la notation $\langle \rangle$, on montre de même

$$\left\langle \cos^2(\omega t) \right\rangle = \left\langle \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{\cos(2\omega t)}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}.$$

Finalement, la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans la résistance vaut donc

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{u_{\text{eff}}^2}{R}, \quad \text{avec} \quad u_{\text{eff}} = \sqrt{\langle u^2(t) \rangle} = U_0 \sqrt{\langle \cos^2 \omega t \rangle} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Propriété

La **valeur moyenne du carré d'un signal sinusoïdal** vaut 1/2.

$$\left\langle \cos^2(\omega t) \right\rangle = \left\langle \sin^2(\omega t) \right\rangle = \left\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \right\rangle = \frac{1}{2}.$$

Propriété

La **valeur efficace** s_{eff} **d'un signal sinusoïdal** $s(t)$ d'amplitude S_1 vaut

$$s_{\text{eff}} = \frac{S_1}{\sqrt{2}}.$$

Rq : Le carré de la moyenne d'un signal est en général différent de la moyenne du carré du signal : **l'ordre importe** ! En anglais, la valeur efficace correspond à la valeur **RMS** pour *root mean square* : on prend la racine de la moyenne du carré.

Application 2 – Valeur efficace

1. Exprimer, puis calculer la valeur efficace des signaux $s_1(t)$ et $s_4(t)$ (App. 1). Commenter.
2. Exprimer, puis calculer la valeur efficace du signal $s_5(t)$ (App. 1).
3. La tension $s_5(t)$ est la tension aux bornes d'une résistance R. Calculer la puissance moyenne dissipée par effet Joule. Qu'en est-il si la même résistance est alimentée par une tension continue $U = 0{,}5\,\mathrm{V}$?

1.3 Spectre d'un signal

Expérience : Synthèse d'un signal périodique

sciences.univ-nantes.fr

Propriété

Tout signal périodique $s(t)$ de fréquence f_s se décompose en une **somme** (infinie) de **composantes harmoniques** (sinusoïdales) de fréquences multiples de f_s. C'est la décomposition en série de Fourier :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(2\pi n f_s t + \varphi_n),$$

où

- S_0 est la **composante continue** du signal, qui correspond à sa **moyenne** ;
- f_s et S_1 caractérisent le **mode fondamental** ;
- les composantes suivantes sont les **harmoniques de rang** n.

python **Animation séries de Fourier**

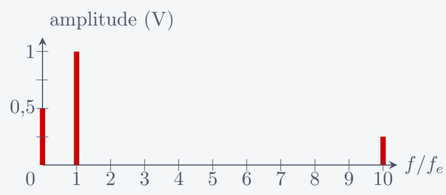
`chapE5-animation_fourier.py`

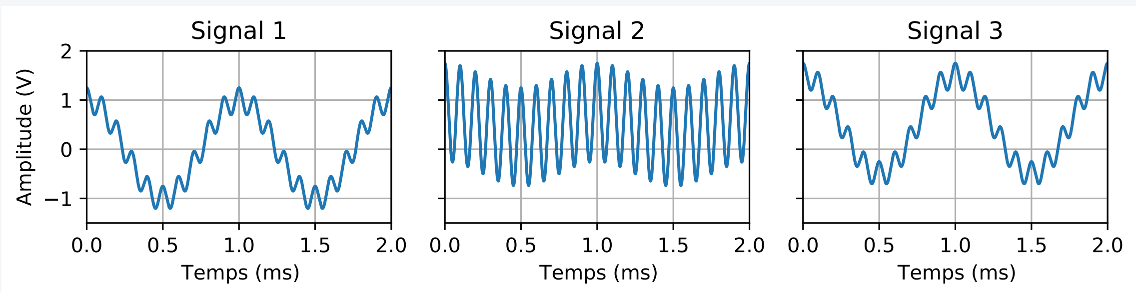
Doc. 1 et 3B1B.

Application 3 – Analyse d'un signal périodique

Le spectre en amplitude d'un signal périodique $e(t)$ est représenté ci-contre. Toutes les composantes ont la même phase à l'origine φ_0.

1. Donner l'expression du signal $e(t)$ en fonction de f_e et φ_0.





2. Le signal $e(t)$ est l'un de ceux représentés ci-dessus. L'identifier en justifiant la réponse.

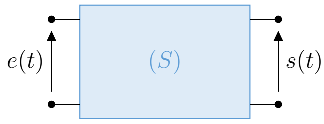
3. Déterminer les valeurs de f_e et φ_0.

4. Représenter le spectre des autres signaux.

Rq : La forme générale du signal est liée aux composantes basse fréquence : valeur moyenne, fondamentale, et premières harmoniques. Les détails plus fins et les discontinuités sont liés aux composantes haute fréquence, c'est-à-dire aux harmoniques de rang n élevé.

2 Filtre linéaire

2.1 Système linéaire



Dans toute la suite, on s'intéresse à un système (S) dont :

- les propriétés sont **indépendantes du temps** ;
- le comportement est **linéaire**, c'est-à-dire que l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ sont reliées par une équation différentielle linéaire.

Propriété

Pour un système (S) linéaire, on peut appliquer le **principe de superposition** : si l'on connait la réponse s_1 de (S) à une entrée e_1 et s_2 à une entrée e_2, la réponse à un signal de la forme

$$e(t) = \lambda e_1(t) + \mu e_2(t), \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,$$

est simplement

$$s(t) = \lambda s_1(t) + \mu s_2(t).$$

Rq : S'il (S) est linéaire, $e(t)$ et $s(t)$ sont liés par une équation différentielle linéaire : le principe de superposition est alors naturel.

Propriété

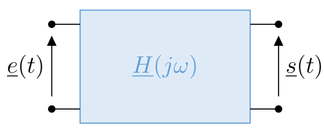
La réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale de pulsation ω est aussi sinusoïdale à la pulsation ω.

Dans le contexte du **traitement du signal**, le système linéaire (S) sera appelé **filtre linéaire**. On s'intéresse donc à l'effet d'un filtre **linéaire** sur un signal **périodique** $s(t)$:

- puisque le signal est périodique : on peut le décomposer en série de Fourier ;
- puisque le filtre est linéaire : le signal de sortie du filtre correspond à la superposition de la réponse du filtre associée à chacune des composantes de pulsation ω du signal $s(t)$.

Si l'on connait la **réponse du filtre à chaque fréquence**, on pourra déterminer sa réponse à une **entrée périodique quelconque**.

2.2 Fonction de transfert harmonique



Définition

Pour un **filtre linéaire** soumis à un signal d'entrée $e(t)$ **harmonique** (sinusoïdal pur) de pulsation ω, associé au signal complexe $\underline{e}(t) = E_0 e^{j\omega t}$, délivrant un signal de sortie $\underline{s}(t) = S_0(\omega) e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}$, on définit la **fonction de transfert harmonique** $\underline{H}(j\omega)$ par

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{s}(j\omega)}{\underline{e}(j\omega)} = \frac{S_0(\omega)}{E_0} e^{j\varphi(\omega)}.$$

L'**amplitude** $S_0(\omega)$ du signal de sortie dépend du **module** de la fonction de transfert.

Définition

On définit le **gain linéaire** du filtre :

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|.$$

Le **déphasage** $\varphi(\omega)$ entre la sortie et l'entrée est donné par son **argument**.

Définition

On définit la **phase** du filtre :

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)).$$

2.3 Filtrage linéaire d'un signal périodique

Signal harmonique

La sortie du filtre soumis à une **entrée harmonique** de la forme $e(t) = E_1 \cos(\omega_e t + \phi_e)$ s'exprime directement

$$\underline{s}(t) = \underline{H}(j\omega_e) \times \underline{e}(t) \quad \text{ou} \quad s(t) = G(\omega_e) \times E_1 \cos(\omega_e t + \phi_e + \varphi(\omega_e)).$$

Signal périodique non harmonique

Si le signal d'entrée $e(t)$ n'est **pas harmonique**, on a

$$\underline{s}(t) \neq \underline{H}(j\omega_e) \times \underline{e}(t).$$

En effet, **la réponse du filtre est différente pour chaque composante du signal**.

Pour déterminer la réponse $s(t)$ du filtre à une entrée $e(t)$ **périodique non harmonique** :

- on commence par développer le signal $e(t)$ en sa série de Fourier

$$e(t) = E_0 + E_1 \cos(\omega_e t + \phi_1) + \cdots + E_n \cos(n\omega_e t + \phi_n)$$

$$\underline{e}(t) = E_0 + E_1 e^{j(\omega_e t + \phi_1)} + \cdots + E_n e^{j(n\omega_e t + \phi_n)}$$

- on applique **séparément** la fonction de transfert complexe à **chaque** composante de $\underline{e}(t)$ en exploitant la linéarité du filtre et le principe de superposition, avant de repasser en réel :

$$\begin{aligned}\underline{s}(t) = {} & \underline{H}(0) \times E_0 \\ & + \underline{H}(j\omega_e) \times E_1 e^{j(\omega_e t + \phi_1)} + \cdots \\ & + \underline{H}(nj\omega_e) \times E_n e^{j(n\omega_e t + \phi_n)}\end{aligned}$$

- ou de manière équivalente, directement en réel :

$$\begin{aligned}s(t) = {} & G(0) \times E_0 \\ & + G(\omega_e) \times E_1 \cos(\omega_e t + \phi_1 + \varphi(\omega_e)) + \cdots \\ & + G(n\omega_e) \times E_n \cos(n\omega_e t + \phi_n + \varphi(n\omega_e))\end{aligned}$$

Application 4 – Action d'un filtre sur un signal (1)

Le signal $e(t)$ de l'App. 3 est envoyé à l'entrée d'un filtre dont la fonction de transfert est

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}, \quad \text{avec } \omega_c = 2\pi \times 1\,\text{kHz}.$$

1. Donner l'expression du signal $s(t)$ en sortie du filtre et représenter, côte à côte les spectres en amplitude de $e(t)$ et $s(t)$.
2. Représenter graphiquement le signal $s(t)$.
3. Vérifier cette réponse avec Python (`chapE5-app4.py`).
4. Quelle est la nature de ce filtre ? Quel type de filtre permettrait d'isoler la composante à $10f_e$ du signal $e(t)$?

2.4 Lien avec la représentation temporelle

Une fonction de transfert peut s'écrire sous la forme d'une fraction de polynômes en $j\omega$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{a_0 + a_1(j\omega) + \ldots + a_p(j\omega)^p}{b_0 + b_1(j\omega) + \ldots + b_q(j\omega)^q},$$

où les coefficients $(a_0, \ldots, a_p)$ et $(b_0, \ldots, b_q)$ sont des réels. L'équation différentielle associée à ce filtre est alors :

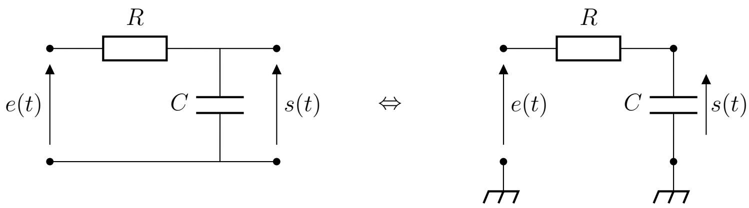
$$a_0 + a_1\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \ldots + a_p\frac{\mathrm{d}^p e}{\mathrm{d}t^p} = b_0 + b_1\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \ldots + b_q\frac{\mathrm{d}^q s}{\mathrm{d}t^q}.$$

Définition

L'**ordre** n du filtre est celui de l'équation différentielle associée, c'est-à-dire le plus grand entier entre p et q.

3 Diagramme de Bode

On s'intéresse au filtre RC représenté ci-dessous, où $e(t)$ est harmonique de pulsation ω.



On suppose que la sortie du filtre est connectée à un système d'**impédance d'entrée infinie**. L'intensité du courant est donc nulle en sortie du filtre. On reconnait un pont diviseur de tension :

$$\underline{s}(t) = \frac{\frac{\underline{e}(t)}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} = \frac{\underline{e}(t)}{1 + jRC\omega} = \frac{\underline{e}(t)}{1 + j\omega\tau}, \quad \text{d'où} \quad \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}.$$

3.1 Gain et phase

python **Construction du diagramme de Bode**

`chapE5-rc.py`

Définition

Le **diagramme de Bode** est constitué de deux graphiques :

- le diagramme de Bode en **amplitude** correspond à la représentation du gain en décibel $G_{\mathrm{dB}}(\omega)$ en fonction de $\log(\omega)$, où :

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log|\underline{H}(j\omega| = 20\log(G(\omega));$$

- le diagramme de Bode en **phase** correspond à la représentation de $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega))$

Rq : On peut aussi adopter une échelle semi-logarithmique en abscisse pour tracer G_{dB} et φ en fonction de ω, f ou de la variable réduite $x = \omega\tau$ par exemple.

Propriété

Lorsque le gain diminue (*resp.* augmente) de **20 dB**, l'amplitude du signal de sortie est divisée (*resp.* multiplié) par 10.

Propriété

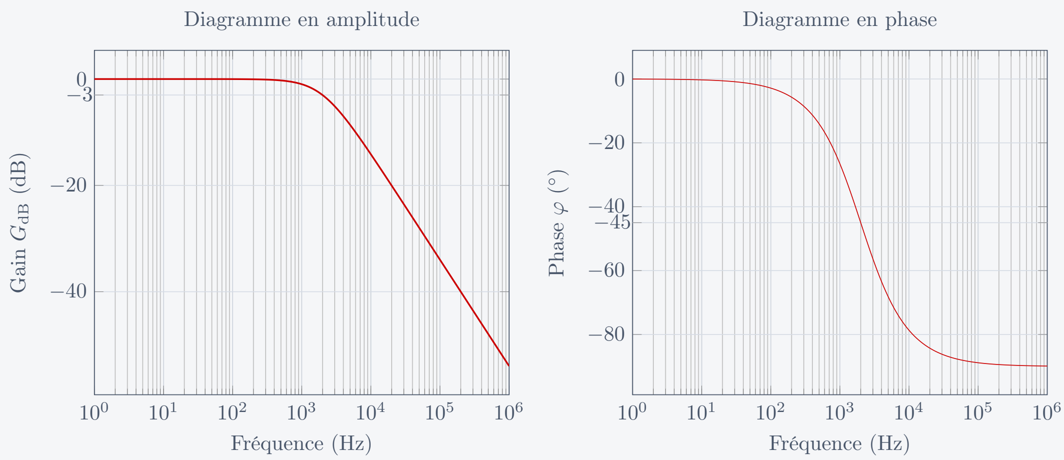
Lorsque le gain diminue (*resp.* augmente) de **3 dB**, l'amplitude du signal de sortie est divisée (*resp.* multiplié) par $\sqrt{2}$.

Application 5 – Action d'un filtre sur un signal (2)

Soit $e(t)$ une tension périodique de la forme

$$e(t) = 5 + \cos(2\pi \times 100t) + 2\cos(2\pi \times 2\cdot 10^3 t) + 10\cos(2\pi \times 200\cdot 10^3 t),$$

où e est en volts et t en secondes. Le signal $e(t)$ alimente un filtre dont le diagramme de Bode est représenté ci-dessous.



1. Déterminer la période de $e(t)$.
2. Représenter le spectre en amplitude de $e(t)$ et celui du signal $s(t)$ à la sortie du filtre.
3. Donner l'expression de $s(t)$.
4. Avec Python, représenter le signal à l'entrée et à la sortie du filtre (`chapE5-app5.py`).

3.2 Pulsation de coupure

Définition

On définit la **pulsation de coupure à -3 dB** comme la pulsation ω_c vérifiant

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega_c) = G_{\mathrm{dB,max}} - 3, \text{ c'est-à-dire } G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

Dans le cas du filtre RC étudié précédemment, on a $G_{\max} = 1$ d'où $\omega_c = 1/\tau$. Les signaux dont la pulsation est supérieure à ω_c sont « sensiblement » atténués.

Définition

On définit la **bande passante à -3 dB** comme la plage de pulsation sur laquelle

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega) \geqslant G_{\mathrm{dB,max}} - 3, \text{ c'est-à-dire } G(\omega) \geqslant \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

3.3 Diagramme de Bode asymptotique

Pour tracer l'allure du diagramme de Bode, on commence par tracer les **asymptotes** BF et HF. Leurs équations sont obtenues en trouvant les **équivalents** de la fonction de transfert en BF et en HF.

Pour illustrer la méthode, on reprend l'exemple du filtre RC, dont la fonction de transfert s'écrit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}, \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{1}{\omega_c} = RC.$$

	BF : $\omega \ll \omega_c$	$\omega = \omega_c$	HF : $\omega \gg \omega_c$
Fonction de transfert	$\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$		
Équivalent			
Gain linéaire			
Gain (dB)			
Asymptote			
Phase			
Asymptote			

Allure du diagramme de Bode

Diagramme en amplitude

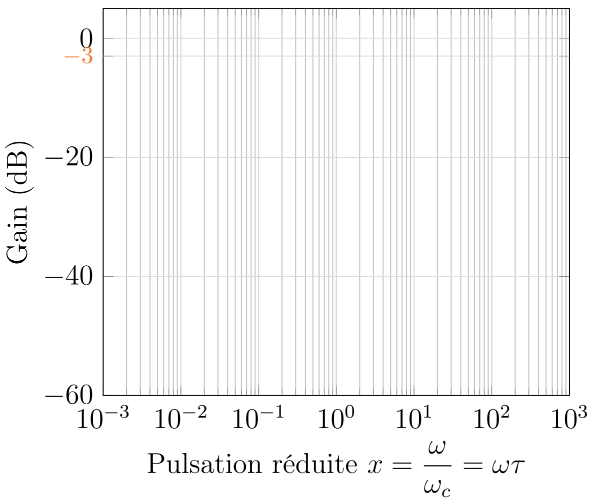
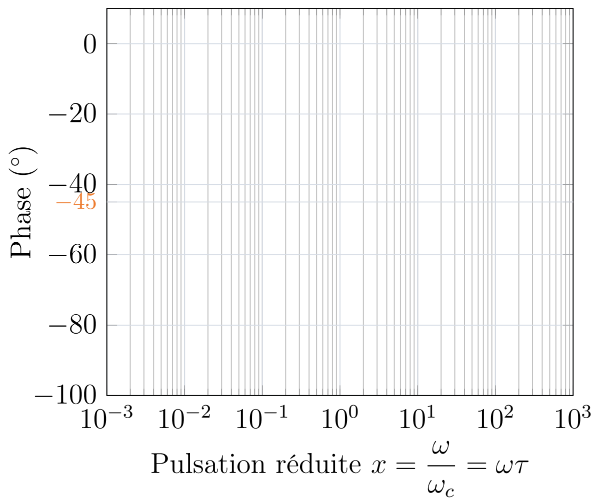


Diagramme en phase



python **Phase et causalité**

`chapE5-causalite.py`

4 Différents types de filtres

4.1 Filtres du premier ordre

Le circuit RC étudié précédemment constitue un premier exemple de filtre du premier ordre. Dans la configuration étudiée, il atténue les fréquences supérieures à sa fréquence de coupure mais laisse passer les basses fréquences, c'est un **filtre passe-bas du premier ordre**.

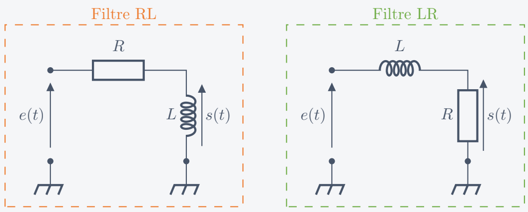
Application 6 – Filtre RL ou LR ?

Pour une restitution optimale du son, les enceintes sont équipées de plusieurs haut-parleurs adaptés à différentes bandes de fréquences. Les plus petits, appelés tweeters, permettent d'émettre les sons les plus aigus. Ces composants sont fragiles : ils peuvent être endommagés par des signaux basse fréquence. Il est donc nécessaire de filtrer le signal qui les alimente.

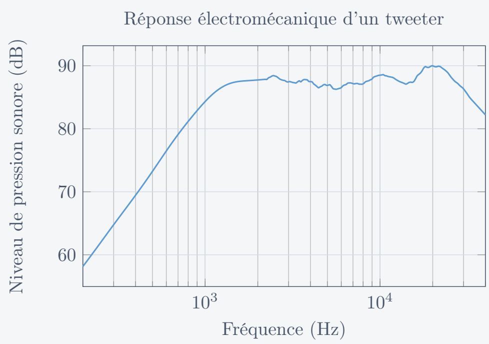
1. Indiquer le type de filtre à utiliser.
2. Sans calcul, identifier celui des deux filtres représentés ci-contre qui convient. Justifier.
3. Établir la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ du filtre adapté. L'écrire sous sa forme canonique

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

et donner l'expression du temps caractéristique τ.



4. Dans la limite haute fréquence, c'est-à-dire pour $\omega \gg 1/\tau$, établir l'équation des asymptotes en gain et en phase.
5. Faire de même, dans la limite basse fréquence, c'est-à-dire pour $\omega \ll 1/\tau$.
6. Exprimer la pulsation de coupure à $-3\,\text{dB}$ en fonction de τ.
7. Construire le diagramme de Bode asymptotique en gain et en phase en fonction de $\log(\omega\tau)$ et en déduire l'allure du diagramme réel.
8. À partir des composants couramment utilisés en TP, proposer des valeurs permettant de réaliser un filtre dont la fréquence de coupure est proche de celle du tweeter dont la réponse est représentée ci-dessous.
9. On alimente ce filtre avec une tension e formée de trois composantes harmoniques de même phase initiale et de fréquences $f_1 = 100\,\text{Hz}$, $f_2 = 1\,\text{kHz}$ et $f_3 = 10\,\text{kHz}$. La troisième composante a une amplitude quatre fois plus faible que les deux premières, de même amplitude. Représenter l'allure du spectre du signal d'entrée e puis du signal de sortie s. En déduire l'allure du signal $s(t)$.



Propriété

La pente des asymptotes BF ou HF vaut $\pm 20\,\mathrm{dB/décade}$ pour les filtres du premier ordre.

4.2 Filtres d'ordres supérieurs

python Traitement du signal et musique

chapE5-filtrage_musique_et_GW.ipynb

python Traitement du signal GW150914

chapE5-filtrage_musique_et_GW.ipynb

Les filtres d'ordre supérieur (Doc. 2 et 3 et TP Python.) permettent d'obtenir des filtres :

- passe-haut ou passe-bas ;
- passe-bande ;
- coupe-bande.

Application 7 – Filtres RLC série

Justifier, à l'aide de circuits équivalents BF et HF, qu'il est possible d'obtenir un filtre passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe-bande à l'aide d'un circuit RLC série. Justifier qualitativement qu'il s'agit d'un filtre du deuxième ordre.

Propriété

Un filtre d'ordre élevé est plus sélectif qu'un filtre du même type d'ordre 1.

Par exemple, le filtre passe-bas RLC série est un filtre d'ordre 2 qui présente une asymptote HF de pente $-40\,\mathrm{dB/décade}$.