TD E4 – Régime sinusoïdal forcé, résonance
Correction

Exercice 1 – Équivalence entre dipôles RL

1. Les impédances équivalentes des dipôles $R'L'$ série et RL parallèle s'écrivent

$$\underline{Z}'_{\text{éq}} = R' + jL'\omega \quad \text{et} \quad \underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{jLR\omega}{R + jL\omega} = \frac{RL^2\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2} + j\frac{R^2L\omega}{R^2 + L^2\omega^2},$$

où la dernière relation est obtenue en multipliant en haut et en bas par le complexe conjugué du dénominateur. Pour avoir $\underline{Z}'_{\text{éq}} = \underline{Z}_{\text{éq}}$, les parties réelles et imaginaires des deux complexes doivent être égales d'où

$$\boxed{R' = \frac{RL^2\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{L' = \frac{R^2L}{R^2 + L^2\omega^2}.}$$

2. Avec un condensateur C' à la place de la bobine L', l'impédance équivalente $\underline{Z}'_{\text{éq}}$ devient

$$\underline{Z}'_{\text{éq}} = R' + \frac{1}{jC'\omega} = R' - \frac{j}{C'\omega}.$$

Les deux dipôles sont équivalents si

$$R' = \frac{RL^2\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{C'\omega} = \frac{R^2L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}.$$

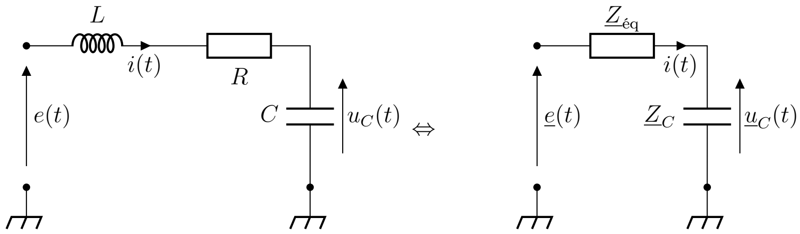
La deuxième égalité est impossible car toutes les grandeurs sont positives. Ceci traduit la différence fondamentale entre les comportements inductif de la bobine et capacitif du condensateur.

Exercice 2 – Résonance en tension dans un circuit RLC

1. Avec $e(t) = E_0\cos(\omega t)$, on a directement

$$\boxed{\underline{e}(t) = E_0 e^{j\omega t}.}$$

2. On passe en complexe et on simplifie le circuit de manière à faire apparaitre un pont diviseur de tension.



On a

$$\underline{u}_C(t) = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_{\text{éq}}}\underline{e}(t), \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_{\text{éq}} = R + jL\omega,$$

d'où

$$\boxed{\underline{u}_C(t) = \frac{\underline{e}(t)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.}$$

3. En RSF à la pulsation ω, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow j\omega,$$

d'où

$$(1\underbrace{-LC\omega^2}_{+LC\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}}\underbrace{+jRC\omega}_{+RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}})\underline{u}_C(t) = \underline{e}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \left(LC\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 1\right)\underline{u}_C(t) = \underline{e}(t).$$

On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur amorti de pulsation propre ω_0 et de facteur de qualité Q, soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) + \omega_0^2u_C(t) = \omega_0^2e(t), \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.}$$

4. Avec les notations introduites précédemment, on obtient

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}.}$$

5. On évalue $\underline{H}$ en $\omega = \omega_0$:

$$\underline{H}(j\omega_0) = \frac{Q}{j} = -jQ, \quad \text{d'où} \quad \boxed{G(\omega_0) = Q} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}.}$$

6. On a

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}.$$

On pose

$$f(x) = (1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2, \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

La fonction G est maximale en ω_r si f est minimale en $x_r = \omega_r/\omega_0$, car la fonction racine est croissante et la fonction inverse est décroissante.

f admet un extremum s'il existe une valeur x_r de x qui annule la dérivée première de f, c'est-à-dire si

$$f'(x) = -4x(1-x^2) + \frac{2x}{Q^2} = 2x\left(2(x^2-1) + \frac{1}{Q^2}\right) = 0$$

On cherche une racine x_r réelle strictement positive, donc solution de

$$2(x^2-1) + \frac{1}{Q^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}.$$

Cette équation n'admet des solutions réelles que si

$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On garde alors la racine positive si cette condition est vérifiée

$$x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Par ailleurs on a $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc cet extremum est un minimum.

Dans le circuit RLC série, il existe une résonance en tension aux bornes du condensateur à la pulsation [1] [2]

$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \quad \text{si} \quad \boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

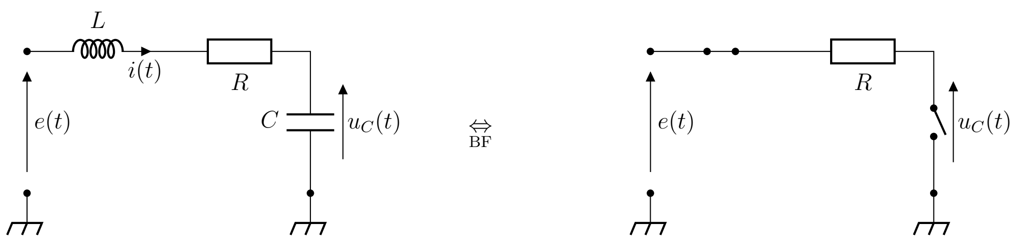
7. Dans le cas où $Q \gg 1$, on a

$$\boxed{\omega_r \approx \omega_0.}$$

8. **En BF**, c'est-à-dire pour $\omega \to 0$, on a

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) \underset{\text{BF}}{\sim} 1,} \quad \text{d'où} \quad G(\omega) \underset{\text{BF}}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) \underset{\text{BF}}{\sim} 0.$$

Ceci est cohérent avec le circuit équivalent qui devient

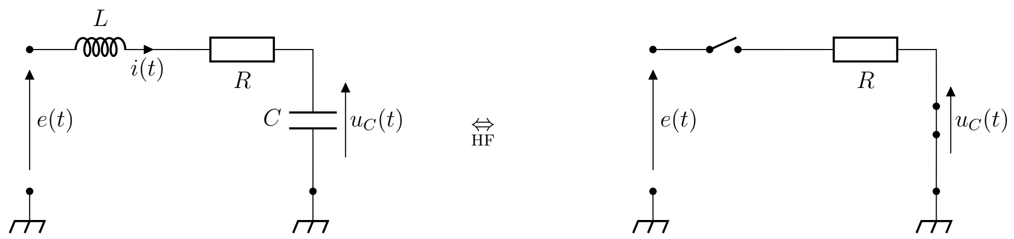


1. La pulsation de résonance ω_r est **différente** de la pulsation propre ω_0 du circuit.
2. En RSF, la limite entre un circuit résonant et un circuit non-résonant est bien à $Q = 1/\sqrt{2}$. Il ne faut pas confondre avec le régime critique qui fixe la limite entre le régime pseudo-périodique et le régime apériodique pour $Q = 1/2$.

On retrouve bien $u_C(t) = e(t)$.
En HF, c'est-à-dire pour $\omega \to \infty$, on a

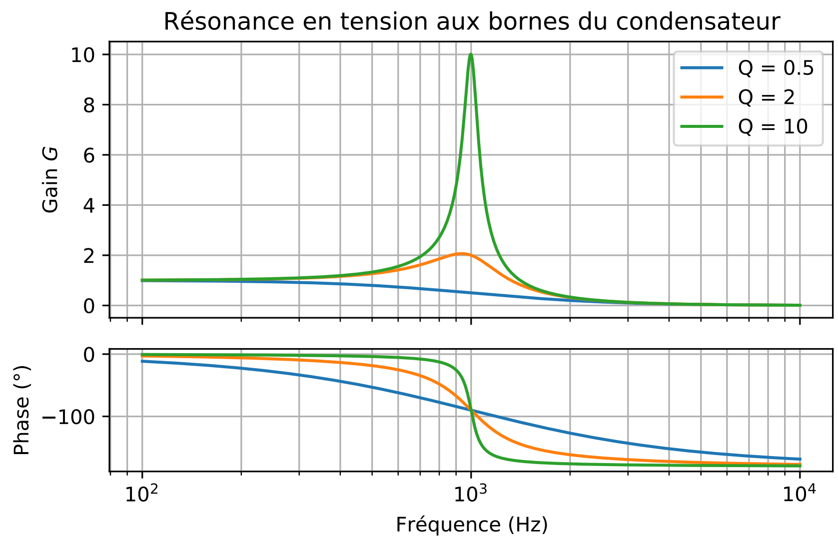
$$\boxed{\underline{H}(j\omega) \underset{\text{HF}}{\sim} -\frac{\omega_0^2}{\omega^2},} \quad \text{d'où} \quad G(\omega) \underset{\text{BF}}{\sim} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \underset{\omega\to\infty}{\to} 0 \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) \underset{\text{BF}}{\sim} \pi.$$

Ceci est cohérent avec le circuit équivalent qui devient



On retrouve bien $u_C(t) = 0$.

9. Avec Python, on obtient les graphes représentés ci-dessous (`tdE4-exo2.py`).



Comme attendu, il n'y a pas de résonance pour $Q = 1/2 < 1/\sqrt{2}$.

Exercice 3 – Paramètres d'une résonance

Dans un circuit RLC série, la pulsation de résonance est la pulsation propre ω_0 du circuit. Le facteur de qualité Q se déduit de la bande-passante $\Delta\omega$ à $-3\,\text{dB}$ avec $Q = \omega_0/\Delta\omega$. Finalement, l'amplitude maximale à résonance est telle que $I_m(\omega_0) = E/R$. Avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

on a

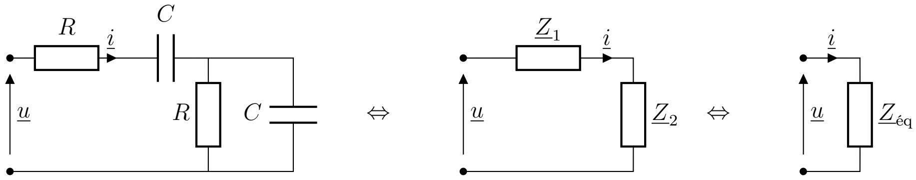
$$\boxed{R = \frac{E}{I_m(\omega_0)}, \quad L = \frac{RQ}{\omega_0} \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{RQ\omega_0}.}$$

Graphiquement, on lit $\omega_0 \approx 10^4\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, $\Delta\omega \approx 5 \times 10^3\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, $I_m(\omega_0) \approx 0{,}85\,\mathrm{mA}$, d'où $Q \approx 2$ et

$$\boxed{R \approx 2{,}9\,\mathrm{k\Omega}, \quad L \approx 0{,}59\,\mathrm{H} \quad \text{et} \quad C \approx 17\,\mathrm{nF}.}$$

Exercice 4 – Impédances équivalentes

1. On procède par étape :



On a

$$\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{jC\omega}, \quad \underline{Z}_2 = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_{\text{éq}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2,$$

d'où

$$\boxed{\underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}{jC\omega(1 + jRC\omega)}.}$$

2. De même, on obtient

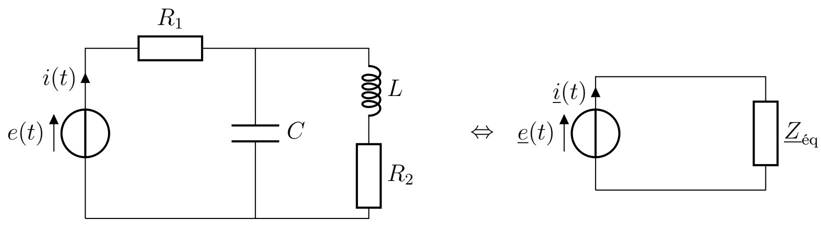
$$\boxed{\underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{1 - L(C_1 + C_2)\omega^2}{jC_2\omega(1 - LC_1\omega^2)}.}$$

3. De même,

$$\boxed{\frac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = j(C_0 + C_1)\omega \left(\frac{1 - \frac{L_1C_0C_1}{C_0+C_1}\omega^2}{1 - L_1C_1\omega^2} \right).}$$

Exercice 5 – intensité et tension en phase

On passe en complexe et on simplifie le circuit pour se ramener à une unique impédance équivalente $\underline{Z}_{\text{éq}}$.



On a (...)

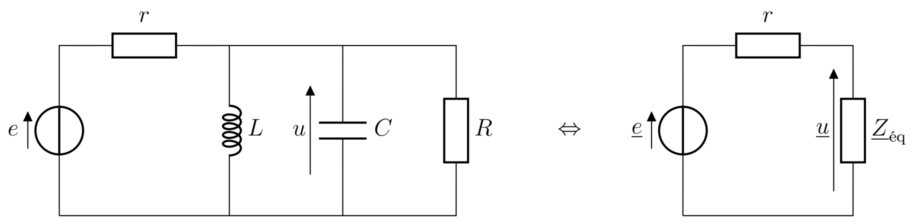
$$\underline{Z}_{\text{éq}} = R_1 + \frac{(R_2 + jL\omega)\left((1 - LC\omega^2) - jR_2C\omega\right)}{(1 - LC\omega^2)^2 + (R_2C\omega)^2}.$$

La loi d'Ohm complexe s'écrit $\underline{e}(t) = \underline{Z}_{\text{éq}}\underline{i}(t)$: les tension $\underline{e}(t)$ et intensité $\underline{i}(t)$ sont en phase si la partie imaginaire de $\underline{Z}_{\text{éq}}$ est nulle, d'où

$$L\omega(1 - LC\omega^2) - R_2^2C\omega = 0, \quad \text{soit} \quad \boxed{L(1 - LC\omega^2) = R_2^2C.}$$

Exercice 6 – Circuit RLC parallèle

Par définition, la charge du condensateur s'exprime $q = Cu$ où u est la tension aux bornes du condensateur. Pour déterminer la tension u, on passe en complexe et on simplifie le circuit de manière à faire apparaitre un pont diviseur de tension.



On obtient (...)

$$\underline{u} = \frac{\frac{R}{R+r}\underline{e}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}, \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{Rr}{R+r}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

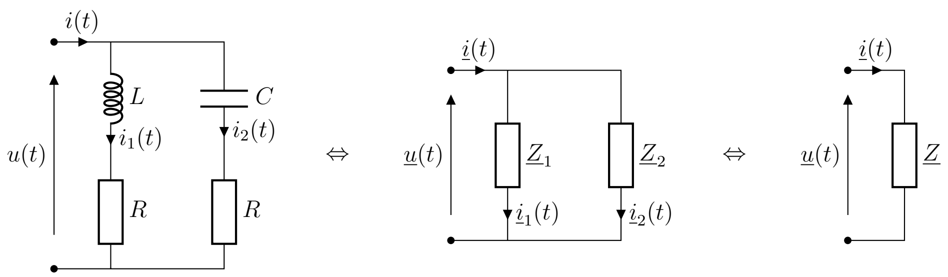
L'amplitude Q_m de la charge q du condensateur est donc

$$Q_m = \frac{Q_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}, \quad \text{avec} \quad Q_0 = \frac{RCE_0}{R+r}.$$

On reconnait une forme analogue à l'expression de l'amplitude de l'intensité dans un circuit RLC série : il y a toujours résonance à la pulsation ω_0.

Exercice 7 – Étude d'un circuit en régime sinusoïdal forcé

1. On passe en complexe, puis on procède par étape, en calculant les impédances équivalentes $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ aux deux branches du circuits, puis l'impédance équivalente $\underline{Z}$ à l'association en parallèle de $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$.



On obtient (...)

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}, \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_1 = R + jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = R + \frac{1}{jC\omega},$$

d'où

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} \times \frac{1 - LC\omega^2 + 2jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + j\omega\left(\frac{L}{R} + RC\right)}.}$$

2. Les intensités complexes $\underline{i}_1(t)$ et $\underline{i}_2(t)$ s'obtiennent à l'aide d'un simple pont diviseur de tension

$$\underline{i}_1(t) = \frac{\frac{1}{\underline{Z}_1}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}}\underline{i}(t) = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}}\underline{i}(t) \quad \text{et} \quad \underline{i}_2(t) = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}}\underline{i}(t),$$

d'où

$$\boxed{\underline{i}_1(t) = \frac{1 + jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + 2jRC\omega} \times \underline{i}(t)} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{i}_2(t) = \frac{jRC\omega - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + 2jRC\omega} \times \underline{i}(t).}$$

On vérifie le comportement asymptotique :

- en BF ($\omega \to 0$), la bobine est équivalente à un fil et le condensateur à un interrupteur ouvert, d'où immédiatement $\underline{i}_1(t) = \underline{i}(t)$ et $\underline{i}_2(t) = 0$. Or

$$\underline{i}_1(t) \underset{\text{BF}}{\sim} \frac{1}{1}\underline{i}(t) = \underline{i}(t) \quad \text{et} \quad \underline{i}_2(t) \underset{\text{BF}}{\sim} \frac{jRC\omega}{1}\underline{i}(t) \underset{\omega\to 0}{\to} 0\ ;$$

- en HF ($\omega \to \infty$), la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert et le condensateur à un fil, d'où $\underline{i}_1(t) = 0$ et $\underline{i}_2(t) = \underline{i}(t)$. Or

$$\underline{i}_1(t) \underset{\text{HF}}{\sim} \frac{jRC\omega}{-LC\omega^2}\underline{i}(t) \underset{\omega\to\infty}{\to} 0 \quad \text{et} \quad \underline{i}_2(t) \underset{\text{HF}}{\sim} \frac{-LC\omega^2}{-LC\omega^2}\underline{i}(t) = \underline{i}(t).$$

3. Le rapport des amplitudes complexes

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{i}_1(t)}{\underline{i}_2(t)} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_2} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = -\frac{(1 + jRC\omega)(LC\omega^2 + jRC\omega)}{(LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}$$

est imaginaire pur si sa partie réelle est nulle, soit

$$LC\omega^2 - (RC\omega)^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad \boxed{RC = \frac{L}{R}.}$$

On a alors

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = -jRC\omega\underbrace{\left(\frac{1 + LC\omega^2}{(LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}\right)}_{>0}.$$

Puisque

$$\arg\left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right) = \arg \underline{I}_1 - \arg \underline{I}_2 \quad \text{et} \quad \arg(-j) = -\frac{\pi}{2},$$

on a bien

$$\boxed{\arg \underline{I}_2 - \arg \underline{I}_1 = \frac{\pi}{2}.}$$

Les deux intensités sont déphasées de $\pi/2$.

4. On cherche une relation entre ω, L et C, pour laquelle $I_{m1} = I_{m2}$, c'est-à-dire telle que

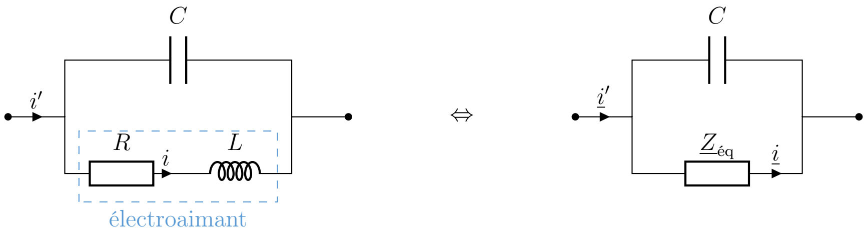
$$\left|\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right| = \left|\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}\right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\underline{Z}_1|^2 = |\underline{Z}_2|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \cancel{R^2} + (L\omega)^2 = \cancel{R^2} + \frac{1}{(C\omega)^2},$$

d'où finalement

$$\boxed{LC\omega^2 = 1.}$$

Exercice 8 – Alimentation d'un électroaimant de levage

1. On passe en complexe et on simplifie le circuit pour faire apparaitre un pont diviseur de courant.



On a alors

$$\underline{I} = \frac{\frac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}}}{\frac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}} + jC\omega}\underline{I}', \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_{\text{éq}} = R + jL\omega,$$

d'où

$$\boxed{\underline{I}' = (1 - LC\omega^2 + jRC\omega)\underline{I}.}$$

2. On cherche la valeur de C pour laquelle l'amplitude $I'_m = |\underline{I}'|$ est minimale, ce qui revient à chercher le minimum de $|1 - LC\omega^2 + jRC\omega|$ si I_m est fixé. Si $|1 - LC\omega^2 + jRC\omega|$ est minimal, son carré l'est aussi : on étudie donc la fonction

$$f(C) = (1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2.$$

On a

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}C} = 2L\omega^2(LC\omega^2 - 1) + 2R^2C\omega^2.$$

On cherche la valeur de C qui annule la dérivée d'où

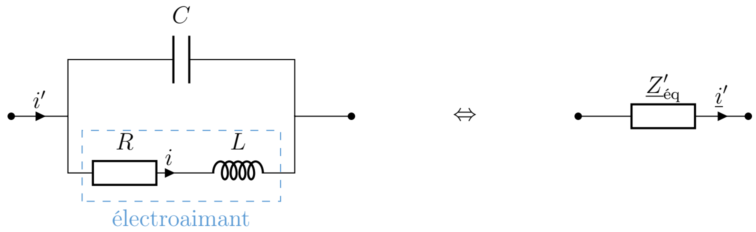
$$\boxed{C = \frac{L}{L^2\omega^2 + R^2}.}$$

3. On a

$$\boxed{I'_m = I_m\sqrt{\left(1 - LC\omega^2\right)^2 + (RC\omega)^2}.}$$

A.N. : $I'_m = 2{,}5 \times 10^{-3} \times I_m = 76\,\mathrm{mA}$, soit 400 fois moins, ce qui est beaucoup plus raisonnable. En réduisant l'intensité dans les câbles d'alimentation d'un facteur 400, la puissance dissipée par effet Joule dans ces mêmes câbles est réduite d'un facteur $400^2 = 1{,}6 \times 10^5$, ce qui représente une économie importante. La puissance dissipée par effet Joule dans l'électroaimant n'est malheureusement pas réduite par l'ajout du condensateur.

4. On se ramène à une unique impédance équivalente $\underline{Z}'_{\text{éq}}$.



L'impédance équivalente à l'association électroaimant-condensateur est alors telle que

$$\frac{1}{\underline{Z}'_{\text{éq}}} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}} + jC\omega = \frac{1}{R + jL\omega} + \frac{jL\omega}{R^2 + L^2\omega^2},$$

en remplaçant C par sa valeur. On obtient

$$\frac{1}{\underline{Z}'_{\text{éq}}} = \frac{R}{R^2 + L^2\omega^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\underline{Z}'_{\text{éq}} = R + \frac{L^2\omega^2}{R} = R_{\text{éq}}.}$$

L'impédance équivalente est celle d'une résistance équivalente $R_{\text{éq}}$.

Exercice 9 – Largeur du pic de résonance

1. On pose $x = \omega/\omega_0$ et on cherche les valeurs x_1 et x_2 de x telles que $I_m(x) = I_0/\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
I_m(x) = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 2 \\
&\underset{Q\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{Q^2} \\
&\Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{x} = \pm\frac{1}{Q} \\
&\underset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad x^2 \mp \frac{x}{Q} - 1 = 0
\end{aligned}$$

On reconnait un polynôme du deuxième ordre en x, dont les racines (...) sont au nombre de quatre

$$x = \pm \frac{1}{2Q} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}.$$

Seules les solutions $(+,+)$ et $(-,+)$ sont positives, d'où

$$x_+ = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q} \quad \text{et} \quad x_- = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} - \frac{1}{2Q}.$$

On a alors

$$\Delta x = x_+ - x_- = \frac{1}{Q}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\Delta\omega = \omega_0 \Delta x = \frac{\omega_0}{Q}.}$$

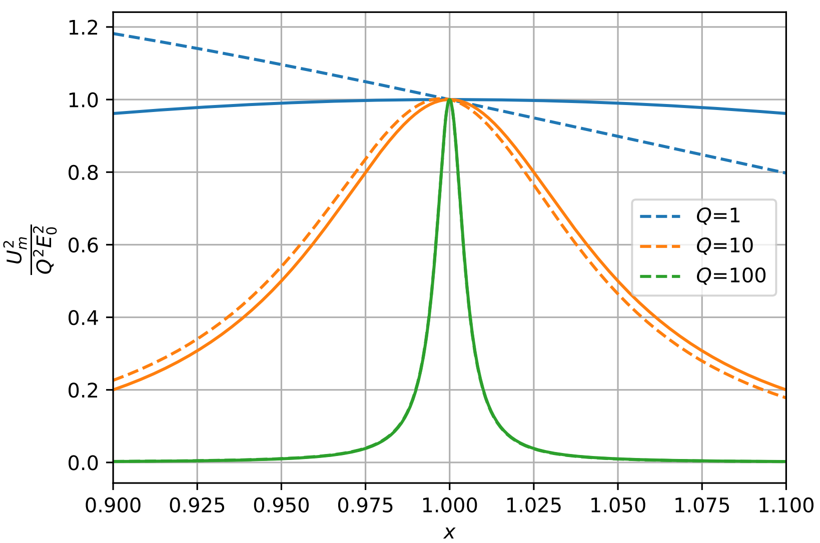
2. On pose aussi $x = \omega/\omega_0$, et on a alors

$$U_m^2 = \frac{E_0^2}{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2} = \frac{Q^2 E_0^2}{Q^2(1-x^2)^2 + x^2}.$$

Avec $1 - x^2 = (1+x)(1-x) \approx 2(1-x)$ car $x \approx 1$ au voisinage de la résonance, on obtient

$$U_m^2 \approx \frac{Q^2 E_0^2}{4Q^2(1-x)^2 + x^2} \approx \frac{Q^2 E_0^2}{4Q^2(1-x)^2 + 1} = \frac{Q^2 E_0^2}{1 + 4Q^2\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2},$$

où l'expression obtenue est une lorentzienne. La deuxième approximation reste raisonnable tant que $4Q^2(1-x)^2 \gg 2(1-x)$, c'est-à-dire si Q est suffisamment grand (...). On peut vérifier graphiquement que l'approximation est raisonnable en traçant U_m^2 et la lorentzienne pour quelques valeurs de Q (cf. ci-dessous : en tireté, la fonction exacte ; en trait plein, la lorentzienne. Sur le graphique, l'écart est notable pour $Q = 1$ mais les courbes semblent bien superposées pour $Q = 100$).



Une fois cette approximation réalisée, on cherche les valeurs x_+ et x_- de x telles que $U_m(x) = QE_0/\sqrt{2}$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} U_m(x) = \frac{QE_0}{\sqrt{2}} \quad & \underset{Q \gg 1}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{1 + 4Q^2 \left(1 - x\right)^2} = \frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow \quad 1 + 4Q^2 \left(1 - x\right)^2 = 2 \\ & \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 - \frac{1}{4Q^2} = 0. \end{aligned}$$

Ce polynôme admet deux racines (...) réelles et positives ($Q \gg 1$)

$$x_\pm = 1 \pm \frac{1}{2Q},$$

d'où comme précédemment

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{2Q}.}$$