DS3 – Mécanique
Correction

Exercice 1 – Fonte des inlandsis

1. La poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ correspond à l'opposé du poids de fluide déplacé, soit

$$\boxed{\vec{\Pi} = -\rho_l V_i \vec{g}.}$$

2. La poussée d'Archimède est toujours orienté selon $-\vec{g}$, donc **vers le haut**.
3. On applique le PFS au glaçon dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{\Pi},$$

où $\vec{P} = \rho_g(V_e + V_i)\vec{g}$ est le poids du glaçon. On en déduit (...)

$$\boxed{V_e = V_i\left(\frac{\rho_l}{\rho_g} - 1\right).}$$

4. La masse m d'eau initialement gelée est conservée lors de la fonte du glaçon. Le volume V_l d'eau liquide occupé par cette masse d'eau est donné par

$$V_l = \frac{m}{\rho_l} = \frac{\rho_g(V_e + V_i)}{\rho_l}.$$

En injectant l'expression obtenue précédemment, on obtient (...)

$$\boxed{V_l = V_i.}$$

Le niveau d'eau liquide ne varie pas.

5. Dans le cas où l'eau liquide est salée, le volume immergé V_i' du glaçon est plus faible car l'eau liquide salée est plus dense que l'eau liquide pure (le glaçon flotte « mieux »), mais une fois fondue, l'eau du glaçon occupe toujours le même volume $V_i > V_i'$: **le niveau de l'eau monte**.
6. La fonte des icebergs participe donc à la montée du niveau des océans, bien que cet effet reste faible devant celui de la fonte des inlandsis.
7. La période des oscillations est d'**un an**. Elle peut s'expliquer par les **variations saisonnières de température**.
8. Sur la figure, on remarque que la masse de l'Antarctique a diminué de 2500 Gt et celle du Groënland de 5000 Gt. Cela correspond à une masse M totale d'eau ajoutée aux océans de $M = 7{,}5\,\text{Tt} = 7{,}5 \times 10^{15}\,\text{kg}$.
Cette masse d'eau correspond à un volume $V = \frac{M}{\rho_l}$, avec $\rho_l = 1{,}0 \times 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, qui se réparti dans tous les océans du globe, dont la surface S occupe environ 70 % de la surface de la Terre, soit

$$S = 0{,}7 \times 4\pi R_T^2,$$

où $R_T \approx 6{,}4 \times 10^3\,\text{km}$ est le rayon terrestre.
La hausse du niveau des océans est donc

$$\boxed{h \approx \frac{V}{S} = \frac{M}{\rho_l \times 0{,}7 \times 4\pi R_T^2}.}$$

A.N. : $h \approx 2{,}0\,\text{cm}$.
Cette valeur semble compatible avec les valeurs couramment évoquées.

Exercice 2 – Service au tennis

1. La balle est en **chute libre**. Le PFD donne donc

$$\vec{a} = \vec{g},$$

d'où

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{g}t + \vec{v_0}.}$$

2. En intégrant à nouveau, on obtient (...)

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v_0}t + H\vec{e_z},$$

d'où

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 t, \\ y(t) = 0, \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + H. \end{cases}}$$

Le mouvement est **plan**.

3. On obtient

$$\boxed{z(x) = -\frac{gx^2}{2v_0^2} + H.}$$

Il s'agit de l'équation d'une **parabole**.

4. Calculons l'altitude de la balle au niveau du filet, c'est-à-dire à l'abscisse $x_F = OF$:

$$z(x_F) = -\frac{gx_F^2}{2v_0^2} + H \approx 0{,}83\,\text{m} < h.$$

La balle ne passe pas au-dessus du filet, elle est « **faute** ».

5. On reprend les résultats précédents en remplaçant $\vec{v_0}$ par $v_0(\cos\alpha\vec{e_x} + \sin\alpha\vec{e_z})$, d'où

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{g}t + v_0(\cos\alpha\vec{e_x} + \sin\alpha\vec{e_z}).}$$

6. Ainsi :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 t\cos\alpha, \\ y(t) = 0, \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha + H. \end{cases}}$$

7. L'équation de la trajectoire devient

$$\boxed{z(x) = -\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha + H.}$$

8. Pour $\alpha \ll 1$, on a $\cos\alpha \approx 1$ et $\tan\alpha \approx \alpha$, d'où

$$z(x) \approx -\frac{gx^2}{2v_0^2} + \alpha x + H.$$

Au niveau du filet, la balle se trouve donc à l'altitude

$$z(x_F) \approx -\frac{gx_F^2}{2v_0^2} + \alpha x_F + H \approx 1{,}2\,\mathrm{m} > h.$$

La balle passe au-dessus du filet.

9. On cherche la position x_S pour laquelle la balle touche le sol, c'est-à-dire pour laquelle $z(x_S) = 0$. Avec l'équation approchée de la trajectoire, on trouve (...)

$$x_\pm = \frac{v_0^2\alpha}{g}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gH}{\alpha^2 v_0^2}}\right).$$

Seule la solution positive a un sens, d'où

$$\boxed{x_S = \frac{v_0^2\alpha}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gH}{\alpha^2 v_0^2}}\right).}$$

A.N. : $x_S \approx 18{,}1\,\mathrm{m}$.
Par ailleurs sur la figure, on mesure $OF = 6{,}7\,\mathrm{cm}$ et $OC = 10\,\mathrm{cm}$. On en déduit que la distance réelle OC vaut $18{,}2\,\mathrm{m} > x_S$. Le service est « **bon** » car la balle passe au-dessus du filet et tombe dans les limites du terrain.

10. **Méthode 1.** Le sommet de la parabole se trouve à l'abscisse

$$x_{\max} = \frac{x_- + x_+}{2} = \frac{v_0^2\alpha}{g},$$

d'altitude

$$z_{\max} = z\left(\frac{v_0^2\alpha}{g}\right) = \frac{v_0^2\alpha^2}{2g} + H.$$

Méthode 2. En cherchant le point où la composante verticale de la vitesse s'annule on retrouve le même résultat avec l'approximation des petits angles. En effet

$$v_z(t) = -gt + v_0\alpha$$

s'annule en

$$t_{\text{max}} = \frac{v_0\alpha}{g}.$$

Ern injectant cette valeur dans les équations du mouvement, on retrouve

$$\boxed{x_{\text{max}} = \frac{v_0^2\alpha}{g}} \quad \text{et} \quad \boxed{z_{\text{max}} = \frac{v_0^2\alpha^2}{2g} + H.}$$

Exercice 3 – Un clou dans les oscillations d'un pendule

1. En coordonnées polaires, on a

$$\overrightarrow{OM} = \ell\overrightarrow{e_r}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\overrightarrow{v} = \ell\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}.}$$

On a donc

$$\boxed{v = \ell\omega.}$$

2. On a

$$\mathcal{E}_\text{c} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2.$$

Le point matériel n'est soumis qu'à son poids et à la tension du fil qui ne travaille pas, d'où

$$\mathcal{E}_\text{p} = mg\ell(1 - \cos\theta).$$

On en déduit

$$\boxed{\mathcal{E}_\text{m} = \mathcal{E}_\text{c} + \mathcal{E}_\text{p} = \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2 + mg\ell(1 - \cos\theta).}$$

3. Le point M n'est soumis qu'à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas, le mouvement est conservatif. On a donc $\mathcal{E}_\text{m} = \text{cste}$.
À l'instant initial, $\theta = \pi/2$ et $\omega = 0$, d'où

$$\mathcal{E}_\text{m} = mg\ell.$$

À l'instant où le fil touche le clou, on a $\theta = 0$, et $\omega = \omega_0$, d'où

$$\mathcal{E}_\text{m} = \frac{1}{2}m\ell^2\omega_0^2 = mg\ell.$$

On en déduit

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_0 = \ell\omega_0 = \sqrt{2g\ell}.}$$

4. L'expression est la même que précédemment en remplaçant ℓ par $\ell - d$, d'où

$$\boxed{\mathcal{E}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m(\ell-d)^2\omega^2 + mg(\ell-d)(1-\cos\theta).}$$

5. Le système n'est toujours soumis qu'à son poids qui est conservatif et la tension du fil qui ne travaille pas, donc le mouvement est conservatif et l'énergie mécanique est conservée :

$$\boxed{\mathcal{E}_\mathrm{m} = \text{cste}.}$$

Le contact avec le clou ne s'accompagne d'aucun transfert énergétique, de sort qu'entre les instants précédant et suivant immédiatement le contact, l'énergie cinétique ne varie pas. Entre ces deux instants l'énergie potentielle reste constante au premier ordre car $\theta = 0$ s'agit d'un minimum d'énergie potentielle. On en déduit que l'énergie mécanique est également conservée lors du contact et garde donc la même valeur que précédemment :

$$\boxed{\mathcal{E}_\mathrm{m} = mg\ell.}$$

6. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, on obtient

$$mg\ell = \frac{1}{2}m(\ell-d)^2\omega^2 + mg(\ell-d)(1-\cos\theta).$$

On en déduit (...)

$$\boxed{\omega^2 = \frac{2g\ell}{(\ell-d)^2} - \frac{2g(1-\cos\theta)}{\ell-d}.}$$

7. Avec

$$\vec{a} = (\ell-d)\dot{\omega}\vec{e_\theta} - (\ell-d)\omega^2\vec{e_r}, \quad \vec{P} = mg(\cos\theta\vec{e_r} - \sin\theta\vec{e_\theta}) \quad \text{et} \quad \vec{T} = -T\vec{e_r},$$

la projection du PFD selon $\vec{e_r}$ s'écrit

$$-m(\ell-d)\omega^2 = mg\cos\theta - T.$$

En utilisant l'expression de ω^2 obtenue précédemment, on obtient

$$\boxed{T = mg\left(\frac{2\ell}{\ell-d} + 3\cos\theta - 2\right).}$$

8. Le fil reste tendu si $T > 0$, c'est-à-diresi

$$\frac{2\ell}{\ell-d} > 2 - 3\cos\theta$$

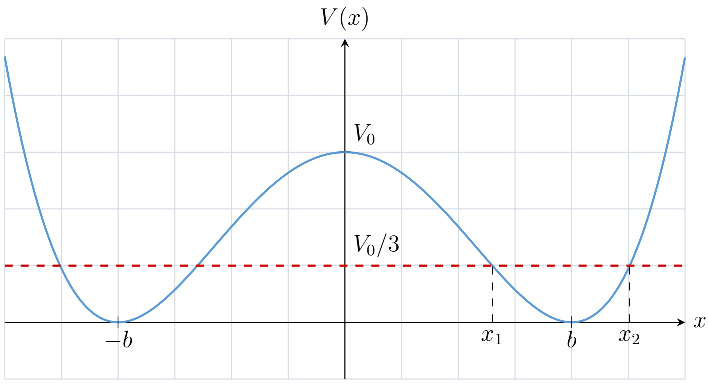
quelle que soit la valeur de θ. Le terme de droite est maximal si $\cos\theta = -1$. Le fil reste donc tendu si

$$\frac{2\ell}{\ell-d} > 5 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{d > \frac{3\ell}{5}.}$$

9. Dans ce cas, M tourne autour de B : le système est dans un **état libre**. En réalité, le diamètre du clou est fini et le fil s'enroule autour.

Exercice 4 – Inversion de la molécule d'ammoniac

1. La courbe d'énergie potentielle présente un **double puits de potentiel**, où les deux puits sont séparés par une barrière finie. L'ensemble est contenu entre deux barrières de potentiel infinies.
   La courbe est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** : $V(x)$ est donc **paire**.
   Il existe **deux positions d'équilibre stables** en $x = \pm b$ et **une position d'équilibre instable** en $x = 0$.
2. En $x = b$, l'énergie potentielle est nulle, donc l'atome d'azote possède une énergie mécanique égale à $V_0/3$.



   Le 'atome d'azote oscille périodiquement entre x_1 et x_2.
3. On doit avoir
$$\boxed{\mathcal{E}_\mathrm{m} > V_0.}$$
4. On a
$$\boxed{\vec{F}(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\vec{e_x}.}$$
5. Cf. cours.
6. On a
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 4V_0\frac{x}{b^2}\left(\frac{x^2}{b^2} - 1\right),$$
   d'où
$$\boxed{\vec{F}(x) = -4V_0\frac{x}{b^2}\left(\frac{x^2}{b^2} - 1\right)\vec{e_x}.}$$
7. Une position d'équilibre x_0 est telle que
$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = 0.$$
   Elle est stable si
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} > 0$$

et instable si

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} < 0.$$

L'équation

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 4V_0\frac{x}{b^2}\left(\frac{x^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

admet trois solutions, donc **trois positions d'équilibre** : $x = 0$ et $x = \pm b$. Par ailleurs,

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} = \frac{4V_0}{b^2}\left(3\frac{x^2}{b^2} - 1\right), \quad \text{d'où} \quad \left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_0 = -\frac{4V_0}{b^2} < 0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{\pm b} = \frac{8V_0}{b^2} > 0.$$

Les positions $x = \pm b$ sont donc stables, tandis que la position $x = 0$ est instable, ce qui est cohérent avec l'étude graphique.

8. La seule force $\vec{F}$ est conservative donc **le mouvement est conservatif**. L'énergie mécanique est constante.

9. La conformation D correspond à $x > 0$, donc on s'intéresse à la position d'équilibre stable $x = b$. En posant

$$\boxed{\varepsilon = \frac{x-b}{b},}$$

on s'intéresse au cas où $\varepsilon \ll 1$.

10. On a

$$V(b) = 0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_b = 0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_b = \frac{8V_0}{b^2}.$$

La formule de Taylor à l'ordre 2 donne donc

$$\boxed{V(x) \underset{x\approx b}{\approx} \frac{4V_0}{b^2}(x-b)^2.}$$

11. Toujours au voisinage de b, on a

$$\mathcal{E}_\mathrm{m} \approx \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{4V_0}{b^2}(x-b)^2.$$

L'énergie mécanique est conservée, soit

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \text{d'où} \quad m\dot{x}\ddot{x} + \frac{8V_0}{b^2}\dot{x}(x-b) = 0.$$

En simplifiant par $\dot{x}$, on obtient

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{8V_0}{mb^2}x = \frac{8V_0}{mb}.}$$

On retrouve l'**équation d'un oscillateur harmonique** de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{8V_0}{mb^2}}.$$

12. On a donc

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{8V_0}{mb^2}}}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8V_0}{mb^2}}.}$$

L'atome d'azote ^{14}N est composé de 14 nucléons (et de 7 électrons de masse négligeable), d'où $m = 14m_n$.

A.N. : $f_0 \approx 15\,\mathrm{THz}$.

13. À température ambiante ($T \approx 300\,\mathrm{K}$), l'atome d'azote possède une énergie de l'ordre de $k_\mathrm{B}T \approx 26\,\mathrm{meV}$, dix fois trop faible pour qu'il puisse franchir la barrière de potentiel : **l'inversion est impossible à température ambiante**.

Pour que l'inversion soit possible, il faut chauffer la molécule à une température T_0 de l'ordre de

$$T_0 \approx \frac{V_0}{k_\mathrm{B}} \approx 2900\,\mathrm{K}.$$

Cette température est très élevée (la température de la surface du Soleil est proche de 6000 K).

L'énergie thermique est-elle suffisante pour rompre les liaisons N−H ? Il faut comparer l'énergie thermique à l'énergie de liaison N−H, qui est de l'ordre de $400\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$, soit environ 4 eV pour une seule liaison. L'énergie de liaison est plus grande que l'énergie thermique minimale nécessaire pour réaliser l'inversion : il existe une gamme de température où la molécule d'ammoniac existe et peut passer librement d'une conformation à l'autre.

En pratique, l'inversion est possible à température ambiante par **effet tunnel** : en mécanique quantique, on peut montrer que la probabilité pour que l'atome d'azote traverse la barrière finie d'énergie potentielle qui sépare les deux conformations n'est pas nulle (Cf. 2$^{\text{ème}}$ année).