DS3 – Mécanique

Durée : 4h.
L'usage de la calculatrice est autorisé.
L'annexe 1 est à rendre avec la copie.

Si au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

RCO Des questions de cours sont identifiées dans le sujet par le sigle RCO dans la marge.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'expliciter clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Toute démarche engagée, même non aboutie, et toute prise d'initiative seront valorisées.

Développement limité

Au voisinage du point x_0, la formule de Taylor-Young à l'ordre deux s'écrit

$$f(x) \approx f(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} (x - x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} \frac{(x-x_0)^2}{2!}$$

Critères d'évaluation de la présentation

Présentation générale	La copie est propre, aérée et lisible. L'orthographe est correcte. Les expressions littérales sont encadrées et les A.N. soulignées. Les pages sont numérotées.
Rédaction	Le vocabulaire scientifique est précis. Les réponses sont claires, explicites et succinctes. Les lois, principes et théorèmes utilisés sont nommés.
Schémas	Les schémas sont suffisamment grands : plus petit que la carte étudiant = invisible. Les schémas sont soignés : règle et compas. Utilisation pertinente de la couleur.
Expressions littérales	Le résultat est celui demandé par l'énoncé. Les notations de l'énoncé sont respectées. Les expressions sont homogènes. Respect des notations : grandeurs algébriques, vectorielles, scalaires, etc. Pas de mélange entre les A.N. et E.L.
Applications numériques	La valeur numérique est accompagnée de son unité. L'A.N. est complète : pas de fraction restante, etc. Le nombre de chiffres significatifs est adapté. Les conversions sont effectuées correctement.
Représentations graphiques	Le graphique est suffisamment grand. Les axes sont tracés à la règle, nommés et les unités sont indiquées (si A.N.). Les limites et valeurs notables, les comportements asymptotiques sont respectés. Les courbes sont tracées à main levée, les droites à la règle, etc.

Exercice 1 – Fonte des inlandsis

Un inlandsis est un glacier de grande étendue qui se présente sous la forme d'une couche de glace dont l'épaisseur peut atteindre plusieurs milliers de mètres et qui recouvre le sol. Il n'existe sur Terre que deux inlandsis : celui du Groënland et celui de l'Antarctique. Ces deux inlandsis se prolongent vers la mer ou l'océan sous la forme de barrières de glace, dont se détachent les icebergs. On propose d'estimer la hausse du niveau des océans sur Terre qui résulte de la fonte des inlandsis ou de la fonte des icebergs.

Équilibre hydrostatique d'un glaçon dans l'eau liquide

Afin d'analyser l'éventuel impact de la fonte des icebergs sur l'élévation du niveau des océans, on propose d'étudier une situation modèle. On considère l'équilibre d'un glaçon, constitué d'eau pure, dans un récipient contenant de l'eau liquide (Fig. 1).

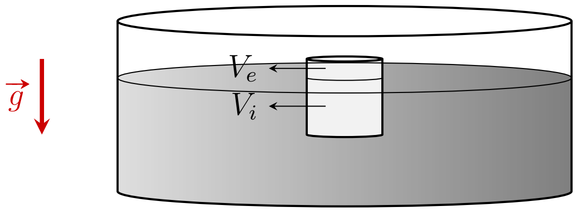


FIGURE 1 – Glaçon flottant dans un récipient rempli d'eau liquide. Le volume émergé du glaçon est noté V_e, le volume immergé V_i.

RCO **1.** Donner l'expression de la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ que l'eau liquide exerce sur le glaçon en fonction du volume immergé V_i, de la masse volumique ρ_l de l'eau liquide et de l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$.

RCO **2.** On fait l'hypothèse que la poussée d'Archimède exercée par l'air est négligeable devant celle exercée par l'eau. Préciser néanmoins le sens de la poussée d'Archimède exercée par l'air sur le glaçon.

3. Exprimer le volume émergé V_e en fonction du volume immergé V_i et des masses volumiques de l'eau liquide ρ_l et de la glace ρ_g.

On repère le niveau de l'eau liquide dans le récipient juste après avoir déposé le glaçon et juste après la fonte de celui-ci.

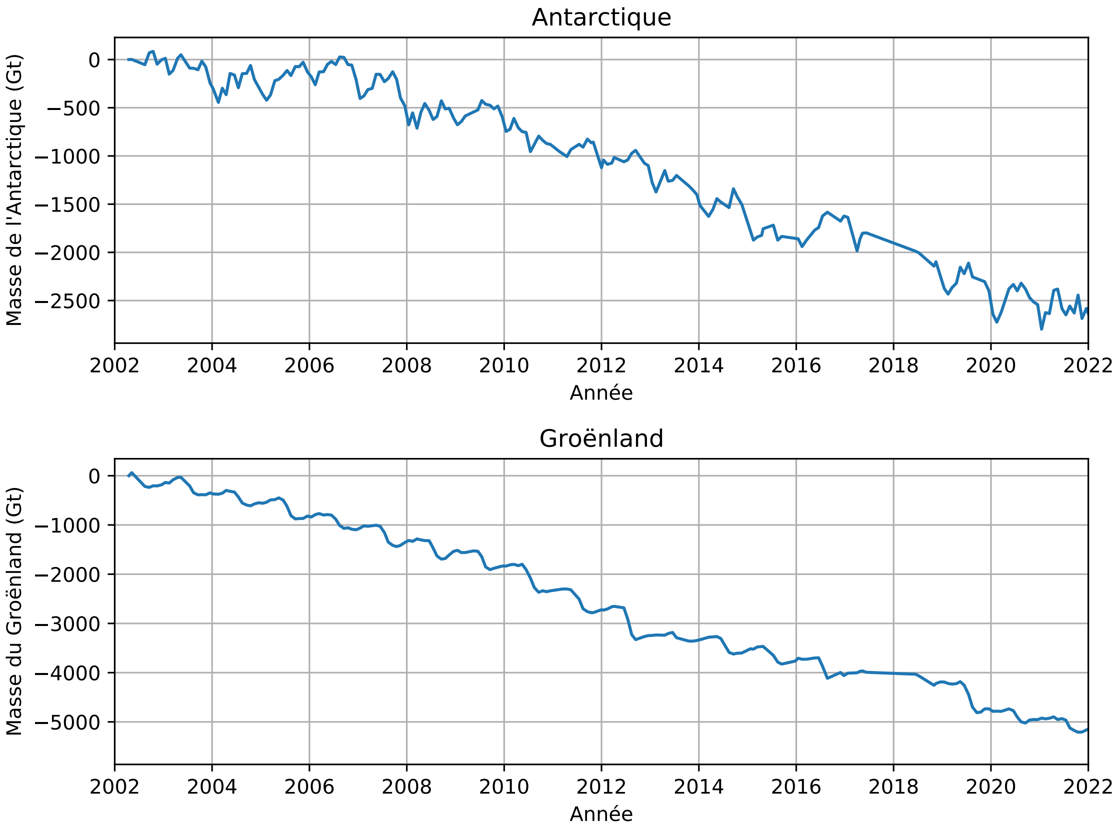
4. Justifier que le niveau d'eau liquide dans le récipient ne varie pas après la fonte du glaçon.

5. Préciser si ce résultat se maintient dans le cas où le glaçon constitué d'eau pure flotte dans de l'eau salée, de masse volumique supérieure à celle de l'eau pure.

6. Conclure quant à l'éventuelle contribution de la fonte des icebergs à l'élévation du niveau des océans.

Hausse du niveau des océans due à la fonte des inlandsis

La fonte de la glace qui constitue les inlandsis contribue à l'élévation du niveau des océans. Les variations de l'épaisseur moyenne des inlandsis se déduisent des mesures de leur altitude de surface par des satellites dédiés. La figure 2 représente les variations estimées de la masse des inlandsis de l'Antarctique et du Groënland depuis 2002.



Source : https://climate.nasa.gov/vital-signs/ice-sheets/.

FIGURE 2 – Variations de la masse (exprimée en gigatonnes) des inlandsis de l'Antarctique et du Groënland au cours des vingt dernières années.

7. Les relevés de la figure 2 présentent des oscillations particulièrement visibles dans le cas du Groënland. Estimer grossièrement la période de ces oscillations et proposer une interprétation de leur origine.

8. Estimer la hausse du niveau des océans consécutive à la fonte des inlandsis du Groënland et de l'Antarctique pendant les vingt dernières années, en s'appuyant sur les données de la figure 2.

Exercice 2 – Service au tennis

Un terrain de tennis est un rectangle de longueur $L = 23{,}8\,\mathrm{m}$ et de largeur $\ell = 8{,}23\,\mathrm{m}$, séparé en deux dans le sens de la largeur par un filet dont la hauteur sera supposée constante et égale à $h = 1{,}0\,\mathrm{m}$. Au service, le lancer de la balle doit s'effectuer de telle façon que la balle passe au-dessus du filet pour rebondir dans une zone comprise entre le filet et une ligne située à une distance $d = 6{,}4\,\mathrm{m}$ du filet (Fig. 3, les proportions sont respectées).

Le joueur, dont les pieds posés au sol sont situés au point O, frappe la balle avec sa raquette en un point A à la verticale de O tel que $OA = H = 2{,}0\,\mathrm{m}$. Il souhaite l'envoyer en un point B situé au plus près du coin C opposé du rectangle de service.

La balle est assimilée à un point matériel M de masse m. Son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen, dans lequel on choisit un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ et on note (x, y, z) les coordonnées du point M. Le repère est orienté de sorte

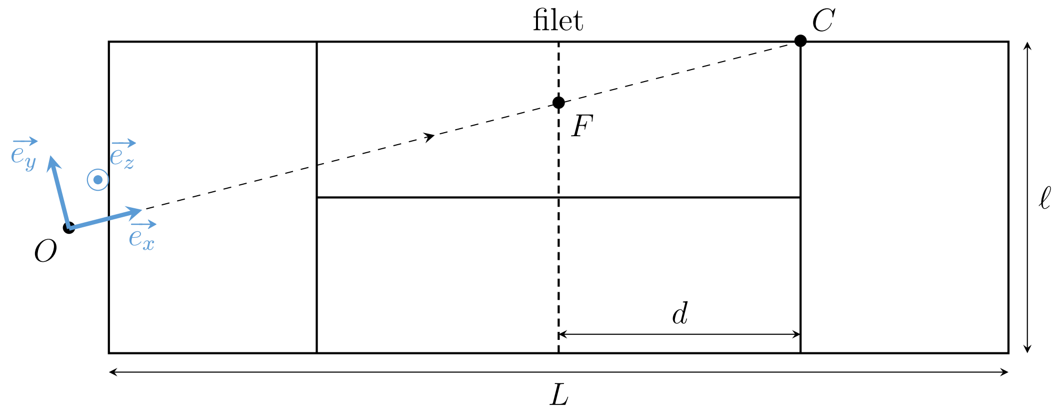


FIGURE 3 – Schéma du terrain de tennis vu du dessus. Les proportions sont respectées.

que le vecteur vitesse initiale $\vec{v_0}$ de la balle est contenu dans le plan $(O, \vec{e_x}, \vec{e_z})$ (Fig. 3). On suppose l'action de l'air négligeable : on ne tient pas compte de la poussée d'Archimède ni des frottements. On note $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ l'accélération de la pesanteur, avec $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. On donne $OF = 12{,}2\,\mathrm{m}$, avec F le point à la base du filet situé sous la trajectoire de la balle (Fig. 3).

Lors du premier service, à l'instant initial $t_0 = 0$, la balle se trouve en A de sorte que $x(0) = y(0) = 0$ et $z(0) = H$. Le vecteur vitesse initiale est horizontal et vaut $\vec{v}(0) = \vec{v_0} = v_0\vec{e_x}$, avec $v_0 = 25\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

RCO **1.** Quelle est la nature du mouvement de la balle après le service ? Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ à un instant t suivant le service.

RCO **2.** Déterminer les équations horaires $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ lors du premier service. Le mouvement est-il plan ?

RCO **3.** Établir l'équation de la trajectoire de la balle lors du premier service. Quelle est la nature de la trajectoire ?

4. Montrer que ce service est déclaré « faute », c'est-à-dire que la balle ne passe pas au-dessus du filet.

Lors du second service, les conditions initiales sont les mêmes que précédemment, à l'exception du vecteur vitesse initiale qui est désormais incliné d'un angle α avec l'horizontale. On a donc maintenant $\vec{v}(0) = v_0\,(\cos\alpha\vec{e_x} + \sin\alpha\vec{e_z})$.

5. Déterminer la nouvelle expression du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ après le deuxième service.

6. En déduire les nouvelles équations horaires $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

7. Établir l'équation de la trajectoire de la balle lors du second service.

8. L'angle $\alpha = \pi/100\,\mathrm{rad}$ étant petit, simplifier l'équation de la trajectoire et montrer que la balle passe cette fois au-dessus du filet.

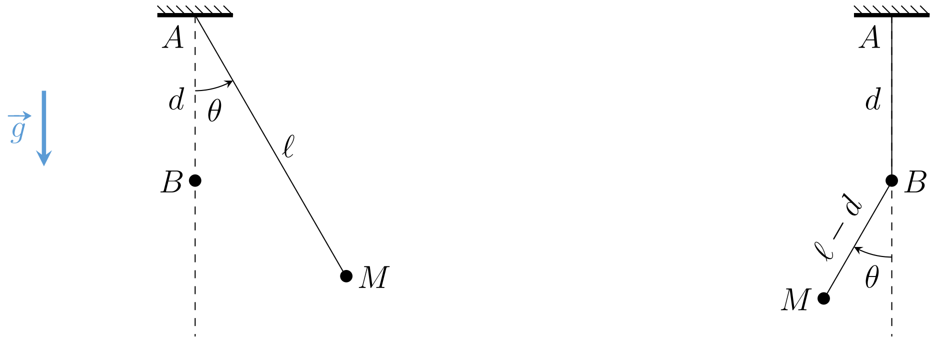
9. En s'appuyant sur l'équation de la trajectoire et la figure 3, montrer que le service est déclaré « bon », c'est-à-dire que la balle touche le sol avant C.

10. Par deux méthodes différentes, déterminer les expressions littérales du point le plus haut de la trajectoire lors du second service.

Exercice 3 – Un clou dans les oscillations d'un pendule

Un pendule est constitué d'un fil de longueur constante ℓ attaché à un point fixe A. À son extrémité est attaché un point matériel M de masse m. Son inclinaison par rapport à la verticale est notée θ. On néglige tout frottement.

Un clou est fixé en B, à la verticale de A à la distance d de ce point. Lorsque le pendule entre en contact avec le clou, on suppose qu'aucun transfert énergétique ne se produit (l'énergie cinétique et donc la vitesse sont continues lors du contact avec le clou). Le pendule est lâché sans vitesse initiale depuis la position $\theta = \pi/2$. L'objectif de l'exercice est de déterminer la condition sur d et ℓ pour que le pendule s'enroule autour du clou situé en B, tout en restant tendu.



On choisit de compter positivement les angles orientés dans le sens trigonométrique. Sur la figure de gauche, on a donc $\theta > 0$ et sur celle de droite $\theta < 0$.

Première partie du mouvement : $\theta > 0$

RCO

1. Montrer que le vecteur vitesse $\vec{v}$ de M s'exprime sous la forme $\vec{v} = v\vec{e_\theta}$. Exprimer v en fonction de ℓ et de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$.
2. Exprimer l'énergie mécanique du système en fonction de m, g, ℓ, θ et ω.
3. En déduire l'expression de la vitesse v_0 et de la vitesse angulaire ω_0 au moment où le fil touche le clou.

Deuxième partie du mouvement : $\theta < 0$

4. Établir la nouvelle expression de l'énergie mécanique du système en fonction de m, g, ℓ, d, θ et ω.
5. Justifier que dans cette seconde partie du mouvement, l'énergie mécanique du système est constante et vaut $\mathcal{E}_\mathrm{m} = mg\ell$.
6. Déduire des deux questions précédentes l'expression de ω^2 en fonction notamment de θ.
7. À l'aide d'une des projections du PFD, montrer que la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e_r}$ est telle que :
$$T = mg\left(\frac{2\ell}{\ell - d} + 3\cos\theta - 2\right).$$
8. Établir la condition entre d et ℓ pour laquelle le fil reste toujours tendu.
9. Dans le cas où cette condition est respectée, décrire qualitativement l'évolution du système.

Exercice 4 – Inversion de la molécule d'ammoniac

***Attention** : Dans cet exercice, la notation $V(x)$ fait référence à l'**énergie potentielle** et non au potentiel électrique !*

La molécule d'ammoniac $^{14}NH_3$ se présente sous la forme d'une pyramide symétrique, l'atome d'azote étant à son sommet. Les trois atomes d'hydrogène définissent le plan de référence. La position de l'atome d'azote est repérée par l'abscisse x telle que $|x|$ soit la distance de l'atome au plan de référence (Oyz) (Fig. 4).

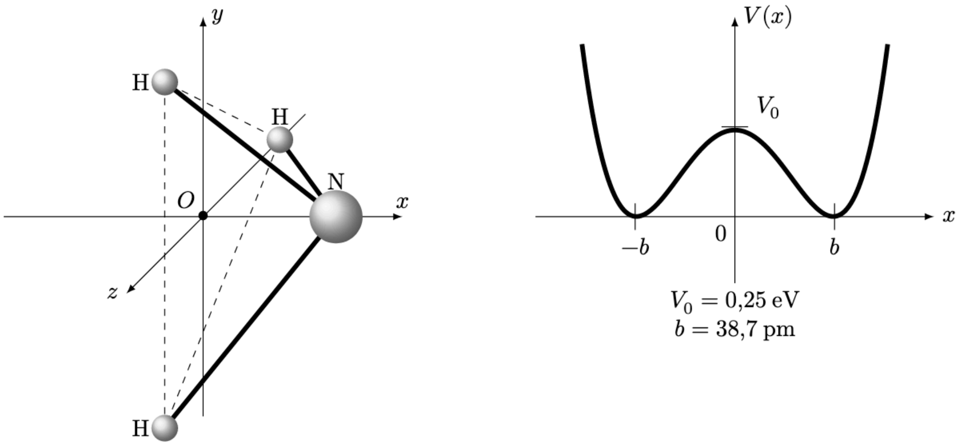


FIGURE 4 – Géométrie et énergie potentielle de la molécule d'ammoniac.

1. Interpréter la forme, la symétrie et les points particuliers de la courbe d'énergie potentielle $V(x)$.

RCO 2. Décrire qualitativement l'évolution de l'abscisse x de l'atome d'azote, initialement situé en $x = b$ et possédant une énergie cinétique $V_0/3$. Sur l'annexe 1 à rendre avec la copie, faire apparaitre les positions x_1 et x_2 pour lesquelles la vitesse $\dot{x}$ est nulle.

La molécule d'ammoniac peut se trouver dans deux états de conformation, selon que l'atome se trouve du coté $x > 0$ (conformation D, Fig. 5) ou du coté $x < 0$ (conformation G). Les deux états sont séparés par une barrière de potentiel $V_0 = 0{,}25\,\text{eV}$.[1] On appelle inversion le passage d'une conformation à l'autre, lorsque l'atome d'azote traverse la barrière d'énergie due aux trois atomes d'hydrogène.

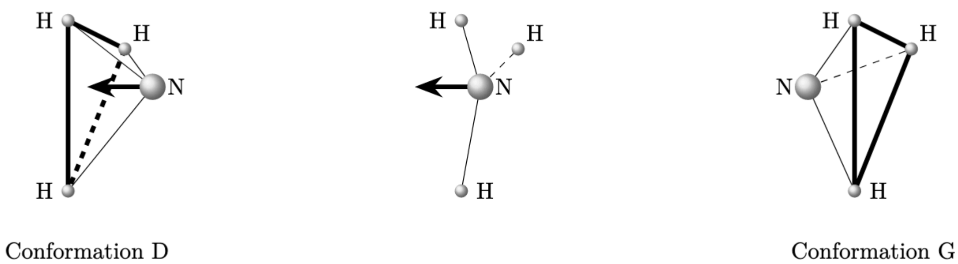


FIGURE 5 – Inversion de la molécule d'ammoniac.

1. L'électronvolt, noté eV, est une unité d'énergie. 1 eV correspond à l'énergie cinétique d'un électron accéléré par une tension de 1 V. On a donc $1\,\text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ J.

3. Donner la condition sur l'énergie mécanique de l'atome d'azote $\mathcal{E}_{\mathrm{m}}$ pour laquelle la molécule peut s'inverser et passer librement d'une conformation à l'autre.

RCO 4. Rappeler l'expression générale de la force $\vec{F}(x)$ associée à une énergie potentielle $V(x)$.

RCO 5. Sur l'annexe 1 à rendre avec la copie, indiquer le sens de la force $\vec{F}(x)$ dans quatre domaines que l'on identifiera.

On suppose que l'énergie potentielle $V(x)$ est de la forme

$$V(x) = V_0 \left(\frac{x^2}{b^2} - 1 \right)^2 .$$

6. Déterminer l'expression de la force $\vec{F}(x)$ exercée sur l'atome d'azote.

RCO 7. Rappeler la condition portant sur l'énergie potentielle qui permet d'obtenir les positions d'équilibre du système et leur stabilité. Retrouver les abscisses des points particuliers identifiés à la question 1 et justifier leur stabilité.

8. En supposant que $\vec{F}$ est la seule force qui s'applique sur l'atome d'azote, que peut-on dire de l'énergie mécanique de l'atome d'azote au cours du mouvement ? Comment qualifier ce mouvement ?

On souhaite étudier les oscillations de l'atome d'azote au voisinage de sa position d'équilibre stable dans la configuration D.

9. À quelle position cela correspond-il ? Préciser le sens de l'expression « au voisinage de » en donnant la quantité adimensionnée ε qui doit rester très petite devant 1.

10. À l'aide d'un développement limité à l'ordre deux, donner l'expression approchée de l'énergie potentielle au voisinage de cette position.

11. En déduire l'équation du mouvement vérifiée par x. Comment appelle-t-on l'équation obtenue ?

12. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 des oscillations, puis de la fréquence propre f_0. Calculer numériquement f_0. On donne la masse d'un nucléon $m_n = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg.

On admet que l'énergie mécanique de la molécule est de l'ordre de $k_{\mathrm{B}}T$, où $k_{\mathrm{B}} = 1{,}38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$ est la constante de Boltzmann et T la température absolue exprimée en kelvins.[2]

13. L'inversion de la molécule d'ammoniac est-elle possible à température ambiante ? À partir de quelle température T_0 cette inversion peut-elle s'effectuer ? Commenter.

On constate expérimentalement que l'inversion est possible à « basses températures ». Pour l'expliquer, il est nécessaire de sortir du cadre de la mécanique classique et de considérer le comportement quantique de la molécule.

2. On rappelle que la température absolue T exprimée en kelvins est liée à la température θ exprimée en degrés Celsius par la relation

$$T = 273{,}15 + \theta.$$

Exemple : une température de 20 °C correspond à une température absolue de 293,15 K.

Annexe 1 – Profil d'énergie potentielle de la molécule d'ammoniac