Exercice 2.

1. Lorsqu'on inverse le mouvement en NN', le clapet CR se ferme immédiatement (la pression dans la pompe augmente et devient supérieure à celle de l'enceinte.

Le clapet CP reste fermé tant que la pression dans la pompe reste inférieure à P_0. Si la pression dans la pompe devient supérieure à P_0 avant que le piston arrive en LL', CP s'ouvre et une fois en LL', le cycle recommence.

2. Quand le piston passe de LL' à NN', on considère le système {air} contenu dans l'enceinte et à gauche de MM', qui est fermé car CP est fermé. La transformation est la suivante :

$$\boxed{\begin{matrix} n_0 \\ P_0 \\ T_0 \\ V+v_m \end{matrix}} \xrightarrow[\text{syst. fermé, GP}]{\text{isotherme}} \boxed{\begin{matrix} n_0 \\ P_1 \\ T_0 \\ V+V_M \end{matrix}}$$

piston en LL' — piston en NN'

Isotherme + syst fermé : $PV = \text{cste}$.

On a donc : $P_0(V+v_m) = P_1(V+V_M)$

$$\boxed{P_1 = P_0 \frac{V+v_m}{V+V_M}}$$

3. On considère l'air contenu dans le raccord et la pompe, entre KK' et MM' qui subit la transformation

$$\begin{matrix} P_0 \\ T_0 \\ v_m \end{matrix} \xrightarrow[\text{fermé, GP}]{\text{isotherme}} \begin{matrix} P_L \\ T_0 \\ V_M \end{matrix}$$

On a donc :

$$P_0 v_m = P_L V_M$$

d'où

$$\boxed{P_L = \frac{P_0 v_m}{V_M}}$$

AN : $\underline{P_L = 50 \text{ mbar}}$.

4. $$P_1 = P_0 \underbrace{\left(\frac{V}{V+V_M}\right)}_{b} + P_0 \underbrace{\left(\frac{v_m}{V+V_M}\right)}_{a\frac{v_m}{V_M}}$$

$$\boxed{P_1 = b P_0 + a P_L}$$

5. Le clapet CR s'ouvre quand la pression dans la pompe est égale à P_1, soit, toujou[rs] en utilisant la conservation du produit PV

cette fois pour l'air entre KK' et LL' à la pression P_0.

$$\boxed{\begin{matrix} P_0 \\ v_m \end{matrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} P_1 \\ V' \end{matrix}}$$

piston en LL' — piston en ΠΠ' lors de l'ouverture de CR

Le clapet CR s'ouvre quand le volume V' de la pompe est tel que

$$V' = \frac{P_0 v_m}{P_1}$$

À partir de là, on considère le système {air dans l'enceinte + pompe} qui subit la transformation :

$$\boxed{\begin{matrix} P_1 \\ V + V' \end{matrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} P_2 \\ V + V_\Pi \end{matrix}}$$

$$P_1 \left(V + \frac{P_0 v_m}{P_1} \right) = P_2 (V + V_\Pi)$$

$$P_2 = P_1 \frac{V}{V + V_\Pi} + P_0 \frac{v_m}{V + V_\Pi}$$

En fonction de P_1, P_L, a et b :

$$P_2 = b P_1 + a P_L$$

puis en fonction de : P_0, P_L, a et b :

$$\boxed{P_2 = b^2 P_0 + a P_L (1 + b)}$$

6. Par récurrence, on obtient :

$$\boxed{P_q = b^q P_0 + a P_L \sum_{i=0}^{q-1} b^i}$$

7. En utilisant la formule de l'énoncé :

$$P_q = b^q P_0 + a P_L \left(\frac{1 - b^q}{1 - b} \right)$$

puis avec $a = 1 - b$:

$$\boxed{P_q = b^q P_0 + P_L (1 - b^q)}$$

8. On isole q à partir de l'expression obtenue :

$$b^q (P_0 - P_L) = -P_L + P_q$$

$$b^q = \frac{P_q - P_L}{P_0 - P_L} \quad \begin{matrix} P_0 > P_L \\ P_q > P_L \end{matrix}$$

$$q \ln b = \ln \frac{P_q - P_L}{P_0 - P_L}$$

$$\boxed{q = \frac{1}{\ln b} \ln \frac{P_q - P_L}{P_0 - P_L}}$$

AN :

$\frac{P_g - P_L}{P_0 - P_L}$	g
10^{-1}	~ 47
10^{-2}	~ 94
10^{-3}	~ 142

9. En reprenant les raisonnements des questions précédentes :

- le clapet CR s'ouvre quand le volume V'' de la pompe vaut

$$V'' = \frac{P_0 v_m}{P}$$

- en considérant la transformation subie par le système {air dans $V + V''$}

$$\begin{matrix} P \\ V + V'' \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} P + \Delta P \\ V + V_M \end{matrix}$$

on a $\quad P\left(V + \frac{P_0 v_m}{P}\right) = (P + \Delta P)(V + V_M)$

$$PV + P_0 v_m = P(V + V_M) + \Delta P (V + V_M)$$

$$\Delta P = \underbrace{bP - P}_{-aP} + aP_L$$

$$\frac{\Delta P}{P_L - P} = a \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{\Delta P}{P - P_L} = -a}$$

10. La loi des GP à l'état initial donne

$$P_0 V = n_0 R T_0$$

puis quand la pression dans l'enceinte vaut P

$$PV = n R T_0$$

d'où

$$\frac{n_0}{P_0} = \frac{n}{P} \quad \text{et} \quad \boxed{n = n_0 \frac{P}{P_0}}$$

Lors de la transformation où la pression dans l'enceinte passe de P à $P + \Delta P$, la quantité de matière dans l'enceinte passe de n à $n + \Delta n$. De même que précédemment, on a

$$n + \Delta n = n_0 \frac{P + \Delta P}{P_0}$$

d'où $\quad \boxed{\Delta n = n_0 \frac{\Delta P}{P_0}}$

Puis, en fonction des quantités demandées :

$$\boxed{\Delta n = n_0 a \frac{P_L - P}{P_0}}$$

Au fur et à mesure que P se rapproche de P_L, $\frac{dn_-}{dq} \to 0$. (on extrait de moins en moins de gaz de l'enceinte à chaque coups de pompe).

11. Durant un intervalle de temps dt, la quantité de matière n dans l'enceinte varie de dn. Cette variation est due à ce qui est extrait : $\frac{dn_-}{dt} \times dt$ par la pompe et ce qui rentre par la fuite $\frac{dn_+}{dt} \times dt$ ce qui se traduit par :

$$dn = \Big(\underbrace{\frac{dn_+}{dt}}_{>0} + \underbrace{\frac{dn_-}{dt}}_{<0}\Big)dt$$

En régime permanent, c'est à dire quand la pression P_L' est atteinte, $dn = 0$, ce qui revient à dire que ce qui rentre par la fuite est extrait par la pompe :

$$\frac{dn_-}{dt} = -\frac{dn_+}{dt} \qquad \text{avec } \frac{dn_-}{dt} = \frac{dq}{dt} \times \frac{dn_-}{dq}$$

En remplaçant par les expressions obtenues précédemment, avec $P = P_L'$

$$\frac{dq}{dt} \times an_0 \frac{P_L - P_L'}{P_0} = -\frac{dn_+}{dt}$$

$$\boxed{P_L' = \frac{P_0}{an_0 \frac{dq}{dt}} \frac{dn^+}{dt} + P_L}$$

Rq : ce n'est pas l'expression demandée mais elle est plus facilement interprétable. On voit

- P_L' est supérieure à P_L
- P_L' est d'autant plus élevée que la fuite $\frac{dn_+}{dt}$ est importante.
- P_L' est d'autant plus proche de P_L que la pompe est rapidement actionnée ($\frac{dq}{dt}$ grand)

Tous ces points sont compatibles avec ce que l'on s'attend à obtenir

L'expression demandée est :

$$\boxed{P_L' = P_0\left(\frac{1}{an_0}\frac{dn_+}{dq} + \frac{v_m}{V_\pi}\right)}$$

Rq : la notation Δn introduite à la question 10 laisse penser qu'il s'agit de la variation de n associée à un coup de pompe : on a bien $\Delta n < 0$. Pourtant l'énoncé parle de quantité "extraite" qui devrait être positive.

L'essentiel ici est d'être cohérent, notamment lors du bilan de la question 11.