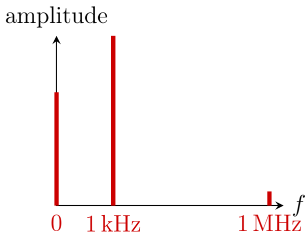
TD E5 – Filtrage linéaire
Correction

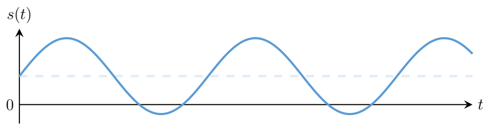
Exercice 1 – Filtrage d'un signal

1. Le signal est formé de trois composantes principales :
   - une composante continue : c'est la valeur moyenne du signal reçu ;
   - une composante de période 1 ms ($f = 1\,\text{kHz}$) : c'est le mode fondamental associé au signal d'intérêt ;
   - une composante de période 1 µs ($f = 1\,\text{MHz}$) : il s'agit d'un bruit qui perturbe la mesure.

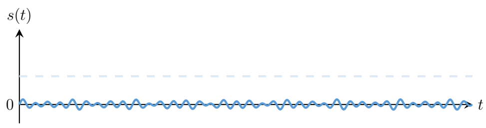
   Qualitativement, ce signal est associé au spectre représenté ci-dessous.



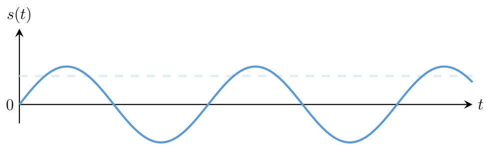
2. On représente le signal à la sortie de chacun des filtres.
   - passe-bas $f_c = 10\,\text{kHz}$: la composante à 1 MHz est éliminée ;



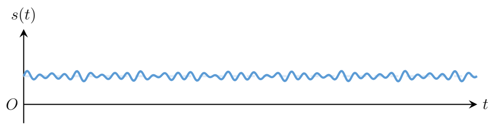
   - passe-haut $f_c = 10\,\text{kHz}$: seule la composante à 1 MHz subsiste ;



   - passe-bande $f_0 = 1\,\text{kHz}$ et BP 100 Hz : seule la composante à 1 kHz subsiste ;



   - coupe-bande $f_0 = 1\,\text{kHz}$ et BC 100 Hz : la composante à 1 kHz est éliminée ;



   Les filtres 1 et 3 peuvent convenir : on privilégiera le 1 pour étudier le signal dans son ensemble ou le 3 si l'on souhaite étudier uniquement les fluctuations du flux lumineux.

Exercice 2 – Choix de filtre

1. Le signal $e(t)$ comporte deux composantes sinusoïdales, l'une de grande période et dont l'amplitude vaut 1 (fondamentale), l'autre de période plus faible et dont l'amplitude vaut 0,5 (harmonique de rang 20). On lit graphiquement :
   - 1 ms pour la plus grande, ce qui correspond à une fréquence de 1 kHz ;
   - 0,05 ms pour la plus faible, ce qui correspond à une fréquence de 20 kHz.

   La sortie $s(t)$ ne comporte plus que l'harmonique à 20 kHz, dont l'amplitude est toujours 0,5. Pour passer de $e(t)$ à $s(t)$, il faut donc éliminer la composante fondamentale , en préservant au mieux l'harmonique. Plusieurs choix sont possibles :
   - filtre passe-haut d'ordre 1. En choisissant une fréquence de coupure de 20 kHz, on conserve 71 % de l'amplitude de l'harmonique et on laisse passer 5 % de la fondamentale. Pour une fréquence de coupure de 10 kHz, on obtient 90 % et 10 %, ce qui peut convenir.
   - filtre passe-haut d'ordre 2. En choisissant une fréquence de coupure de 20 kHz et un facteur de qualité $Q = 1/\sqrt{2}$, on conserve toujours 71 % de l'amplitude de l'harmonique mais on ne laisse passer que 0,25 % de la fondamentale. Pour une fréquence de coupure de 10 kHz et $Q = 1$, on obtient 100 % et 0,25 %. Le deuxième cas nécessite toutefois un réglage précis de la fréquence de coupure du filtre pour assurer un gain unitaire à la fréquence de l'harmonique.
   - filtre passe-bande d'ordre 2, de fréquence centrale 20 kHz. Avec un facteur de qualité élevé, il est possible d'atténuer très fortement la fondamentale. Par exemple, avec $Q = 1000$ le filtre ne transmet que 0,005 % de la fondamentale, tout en conservant un gain unitaire à 20 kHz. Ce type de filtre très sélectif devient très sensible aux perturbations : une légère dérive de la fréquence centrale du filtre (en raison de changements de température qui altèrent les valeurs des composants par exemple) entraine une forte atténuation de l'harmonique qui se retrouve alors rapidement hors de la bande-passante du filtre.
2. Plus rapidement pour les filtres suivant, où l'on ne propose que la solution la plus simple.

   2.a. Filtre passe-haut de fréquence de coupure basse. Il faut trouver un compromis entre une fréquence de coupure aussi faible que possible et un temps de réponse raisonnable qui interdit d'utiliser une fréquence de coupure aussi faible que l'on veut.

   2.b. Filtre passe-bas de fréquence de coupure beaucoup plus faible que 300 Hz.

   2.c. Filtre passe-bande de fréquence centrale 440 Hz et de facteur de qualité élevé.

   2.d. Filtre coupe-bande de fréquence centrale 50 kHz.

Exercice 3 – Lecture de diagramme de Bode

Pour déterminer l'expression du signal de sortie $s(t)$, on applique la même méthode que pour Ex. 5, Q. 7 : prendre le temps de poser le tableau et d'appliquer la fonction de transfert à chaque composante du filtre avant d'utiliser la linéarité du filtre pour déterminer la sortie.

Premier filtre

Il s'agit d'un filtre passe-haut d'ordre 2 : la présence d'une résonance exclu l'ordre 1, l'asymptote en BF de pente +40 dB/décade et le saut de phase de π indiquent un ordre 2.

$$\boxed{s(t) = E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right).}$$

Deuxième filtre

Il s'agit d'un filtre coupe-bande d'ordre 2 : il est impossible de réaliser un coupe-bande d'ordre 1. Le saut de phase de π indique un ordre 2.

$$\boxed{s(t) = 2E_0 + 2E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + 2E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right).}$$

Troisième filtre

Il s'agit d'un filtre passe-haut d'ordre 1 : l'asymptote en BF de pente +20 dB/décade et le saut de phase de $\pi/2$ indiquent un ordre 1.

$$\boxed{s(t) = \frac{E_0}{1000} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{E_0}{100} \cos\left(10\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) + \frac{E_0}{10} \cos\left(100\omega t + \frac{\pi}{6}\right).}$$

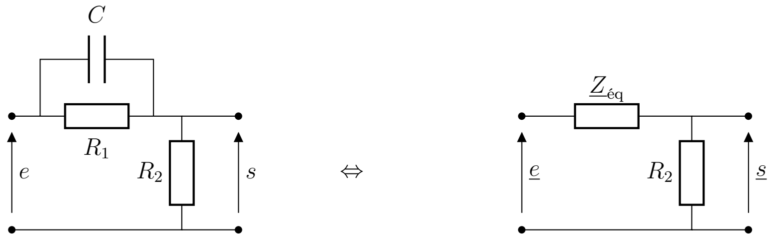
Quatrième filtre

Il s'agit d'un filtre passe-bas d'ordre 2 : l'asymptote en HF de pente −40 dB/décade et le saut de phase de π indiquent un ordre 2.

$$\boxed{s(t) = E_0 + E_0 \cos(\omega t) + \frac{E_0}{10} \cos\left(10\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{E_0}{100} \cos\left(100\omega t - \frac{4\pi}{3}\right).}$$

Exercice 4 – Circuit à avance de phase

1. On passe en complexe à la pulsation ω et on simplifie le circuit de manière à faire apparaitre un pont diviseur de tension.



L'intensité du courant est nulle en sortie du filtre, on a donc

$$\underline{s} = \frac{R_2}{R_2 + \underline{Z}_{\text{éq}}}\underline{e}, \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{R_1}{1 + jR_1C\omega},$$

d'où (...)

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{\underline{H}_2(j\omega)}{\underline{H}_1(j\omega)},} \quad \text{avec} \quad H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

et où $\underline{H}_1$ et $\underline{H}_2$ sont les fonctions de transfert de filtres passe-bas du premier ordre

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{1 + jR_1C\omega} \quad \text{et} \quad \underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{1 + jR_{\text{éq}}C\omega}, \quad \text{avec} \quad R_{\text{éq}} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

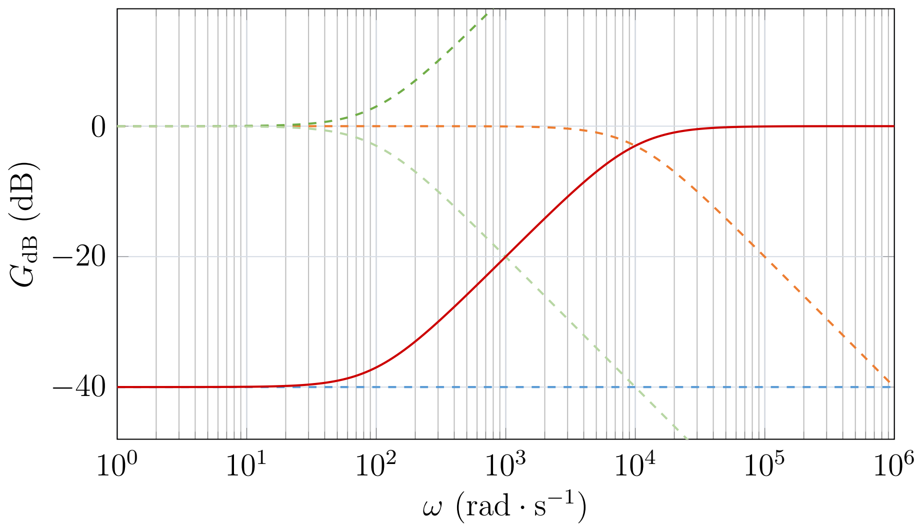
2. On a, pour le gain en décibel

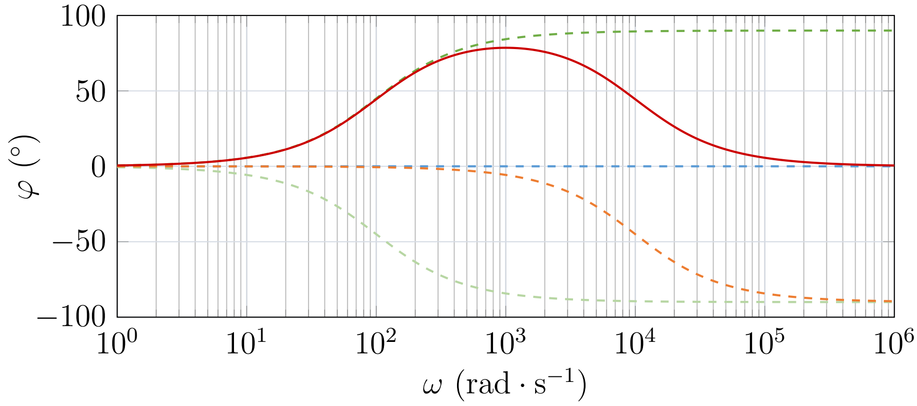
$$\begin{aligned} G_{\text{dB}}(\omega) &= 20 \log |\underline{H}(j\omega)| \\ &= 20 \log H_0 + 20 \log |\underline{H}_2(j\omega)| - 20 \log |\underline{H}_1(j\omega)| \\ &= G_{\text{dB0}} + G_{\text{dB2}}(\omega) - G_{\text{dB1}}(\omega). \end{aligned}$$

et pour le déphasage

$$\varphi(\omega) = \arg \underline{H}(j\omega) = \arg H_0 + \arg \underline{H}_2(j\omega) - \arg \underline{H}_1(j\omega) = \varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega).$$

Avec $R_1 \gg R_2$ (on prend pour le graphique $R_1 = 100R_2$ et $\omega_{\text{c1}} = 100\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$), on a $\omega_{\text{c1}} \ll \omega_{\text{c2}}$ et $H_0 \approx R_2/R_1$, d'où $G_{\text{dB0}} \approx -40\,\text{dB}$. On en déduit le diagramme de Bode représenté ci-dessous.

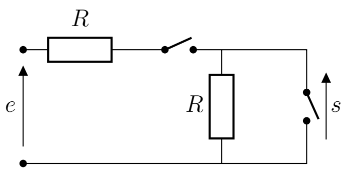




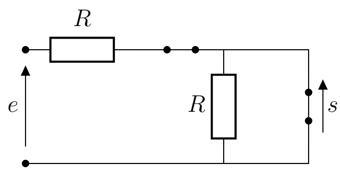
Sur le diagramme de Bode, on a représenté les fonctions de transfert H_0 en bleu, $1/\underline{H}_1$ en vert ($\underline{H}_1$ en vert pâle), $\underline{H}_2$ en orange et $\underline{H}$ en rouge. La courbe rouge correspond donc à la somme des courbes bleue, orange et verte foncée.

Exercice 5 – Filtre de Wien

1. On représente les circuits équivalents en BF et HF :



BF



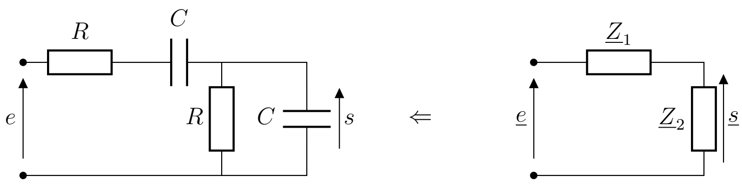
HF

Dans les deux cas, la tension $s(t)$ est nulle :

- en BF car la tension s aux bornes du condensateur est la même que celle aux bornes de la résistance de droite, parcourue par un courant d'intensité nul ;
- en HF car la tension aux bornes d'un fil parfait est nulle.

Il s'agit donc d'un **filtre passe-bande**.

2. On passe en complexe, et on simplifie le circuit de manière à faire apparaitre un pont diviseur de tension.



On a

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{e}, \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_1 = R + \frac{1}{jC\omega} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R} + jC\omega.$$

Tout calculs faits, on obtient

$$\underline{s} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{j}{3}\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}\underline{e},$$

d'où

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}, \quad \text{avec} \quad H_0 = \frac{1}{3}, \quad Q = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}.}$$

On peut remarquer que l'on retrouve une expression analogue à l'amplitude de l'intensité dans un circuit RLC série en RSF (Chap. E4).

3. Avec $x = \omega/\omega_0$, on a

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)},$$

d'où

$$\boxed{G(x) = |\underline{H}(jx)| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}, \quad G_{\text{dB}}(x) = 20\log G(x)}$$

et

$$\boxed{\varphi(x) = \arg \underline{H}(jx) = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right).}$$

4. On a $G(x) > 0$ et on remarque $\lim\limits_{x\to 0} G(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} G(x) = 0$: G admet un maximum quand son dénominateur est minimal, c'est-à-dire pour $x = 1$. On a donc

$$\boxed{G_0 = H_0 = \frac{1}{3}.}$$

A.N. : $G_{\mathrm{dB}} = -20 \log 3 = -9{,}5\,\mathrm{dB}$.
En $x = 1$, le déphasage est nul :

$$\boxed{\varphi_0 = 0.}$$

5. Les fréquences de coupure sont telles que

$$G(x) = \frac{G_0}{\sqrt{2}}.$$

Le calcul est le même que celui de TD E4, Ex. 9, Q. 1. On a donc (...)

$$\boxed{\omega_{c,+} = \omega_0\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q}\right) \quad \text{et} \quad \omega_{c,-} = \omega_0\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} - \frac{1}{2Q}\right),}$$

d'où

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}.}$$

6. On étudie le comportement asymptotique de la fonction de transfert :
   - en BF :
   $$\underline{H}(j\omega) \underset{\mathrm{BF}}{\sim} \frac{H_0 j\omega}{Q\omega_0}, \quad \text{d'où} \quad G_{\mathrm{dB}}(\omega) \underset{\mathrm{BF}}{\sim} 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 20\log\left(\frac{H_0}{Q}\right),$$
   ce qui correspond bien à une asymptote de pente $+20\,\mathrm{dB/décade}$.
   - en HF :
   $$\underline{H}(j\omega) \underset{\mathrm{HF}}{\sim} -\frac{H_0 j\omega_0}{Q\omega}, \quad \text{d'où} \quad G_{\mathrm{dB}}(\omega) \underset{\mathrm{HF}}{\sim} -20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 20\log\left(\frac{H_0}{Q}\right),$$
   ce qui correspond bien à une asymptote de pente $-20\,\mathrm{dB/décade}$.

7. A.N. : $\omega_0 = 2 \times 10^3\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.
Pour chaque composante du signal, on évalue (graphiquement ou avec la fonction de transfert) le gain et le déphasage introduits par le filtre.

Composante	continue	fondamentale	harmonique 10ω	harmonique 100ω
Pulsation $(\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1})$	0	200	2000	20 000
$x = \frac{\omega}{\omega_0}$	0	10^{-1}	10^{0}	10^{1}
G_{dB} (dB)	$-\infty$	-20	$-9{,}5$	-20
$G = 10^{G_{\mathrm{dB}}/20}$	0	0,1	$1/3$	0,1
φ (rad)	$\pi/2$	$\sim \pi/2$	0	$\sim -\pi/2$

On a donc

$$s(t) \approx 0 + \frac{E_0}{10}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{E_0}{3}\cos(10\omega t) + \frac{E_0}{10}\cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

ou encore

$$\boxed{s(t) \approx -\frac{E_0}{10}\sin(\omega t) + \frac{E_0}{3}\cos(10\omega t) + \frac{E_0}{10}\sin(100\omega t).}$$

Le signe $\approx$ est lié aux approximations réalisées dans la lecture du déphasage.

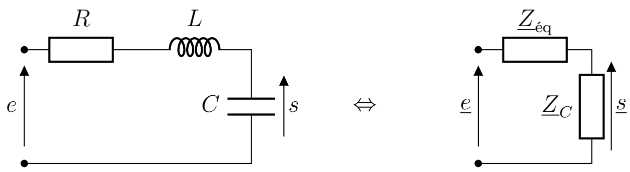
Exercice 6 – Filtres RLC série

Filtre 1

1. On représente les circuits équivalents en BF et HF.

En BF, la tension s vaut e par application de la loi des mailles, la tension aux bornes de la résistance étant nulle car l'intensité du courant dans le circuit est nulle. En HF, la tension s est nulle car la tension aux bornes d'un fil parfait est nulle. Il s'agit donc d'un **filtre passe-bas.**

2. On passe en complexe à la pulsation ω et on simplifie le circuit de manière à faire apparaitre un pont diviseur de tension.



On a

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_{\text{éq}}}\underline{e}, \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_{\text{éq}} = R + jL\omega,$$

d'où

$$\underline{s} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}\underline{e}.$$

On en déduit

$$\boxed{\underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}, \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.}$$

Il s'agit d'un filtre d'**ordre 2** car le dénominateur est un polynôme de degré 2 en ω.

3. Avec l'équivalence

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow \times j\omega$$

en RSF à la pulsation ω, on a

$$\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)\underline{s} = \underline{e} \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{Q\omega_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\underline{s} = \underline{e},$$

d'où, en réel et en multipliant par ω_0^2,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 e.}$$

La convergence du régime transitoire est assurée par celle de la solution de l'équation homogène. Ici, le terme ω_0/Q devant la dérivée première est positif (terme d'amortissement), ce qui assure cette convergence. En effet, l'enveloppe exponentielle de la solution transitoire est de la forme $\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$ et converge si $\omega_0/(2Q) > 0$ (cf. Chap. E3). De manière générale, une EDL2 est stable si tous ses coefficients sont positifs.
Un coefficient négatif devant la dérivée première dans l'équation canonique correspondrait à un terme d'amplification, menant à un divergence de la solution.

4. Par définition

$$\boxed{G_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi_1(\omega) = -\arctan\left(\frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right).}$$

5. On cherche les équivalents de la fonction de transfert en BF et HF

$$\underline{H}_1(j\omega) \underset{\mathrm{BF}}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad \underline{H}_1(j\omega) \underset{\mathrm{HF}}{\sim} -\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2,$$

d'où

$$\boxed{G_{\mathrm{dB},1}(\omega) \underset{\mathrm{BF}}{\sim} 0 \quad \text{et} \quad G_{\mathrm{dB},1}(\omega) \underset{\mathrm{HF}}{\sim} -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right),}$$

ce qui correspond bien à une **asymptote BF horizontale en 0 dB** et une **asymptote HF de pente −40 dB/décade**.

6. L'atténuation est plus importante dans la bande coupée pour un filtre d'ordre deux, ce qui permet d'obtenir un filtre **plus sélectif**. Pour le filtre passe-bas d'ordre deux, on a

$$s(t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_e t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{E_0}{100} \cos\left(10\omega_e t - \pi\right).$$

Pour le filtre passe-bas d'ordre 1 dont le gain en décibel présente une asymptote HF de pente $-20\,\mathrm{dB/décade}$, on a

$$s(t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_e t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{E_0}{10} \cos\left(10\omega_e t - \frac{\pi}{2}\right).$$

L'harmonique à $10\omega_e$ est 10 fois plus atténuée avec le filtre d'ordre 2 qu'avec le filtre d'ordre 1.

Filtre 2

La méthode est la même, on indique uniquement les résultats importants.

1. L'étude des circuits équivalents en BF et HF montrent $s \underset{\mathrm{BF}}{=} 0$ et $s \underset{\mathrm{HF}}{=} e$: il s'agit d'un **filtre passe-haut**.
2. On obtient

$$\boxed{\underline{H}_2(j\omega) = \frac{jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}, \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.}$$

On manipule l'expression de manière à faire apparaitre des polynômes en ω au numérateur et au dénominateur. En multipliant en haut et en bas par $j\omega/\omega_0$, on obtient

$$\underline{H}_2(j\omega) = \frac{-Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{j\frac{\omega}{\omega_0} + -Q\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1\right)}.$$

Les polynômes du numérateur et du dénominateur sont de degré 2, il s'agit donc d'un **filtre d'ordre 2**.

3. On obtient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \frac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}t^2},}$$

qui est stable pour les mêmes raisons que précédemment.

4. On a

$$\boxed{G_2(\omega) = \frac{Q\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi_2(\omega) = \arctan\left(Q\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right).}$$

5. On a

$$\underline{H}_2(j\omega) \underset{\text{BF}}{\sim} -\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \quad \text{et} \quad \underline{H}_2(j\omega) \underset{\text{HF}}{\sim} 1,$$

d'où

$$\boxed{G_{\text{dB},2}(\omega) \underset{\text{BF}}{\sim} +40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad \text{et} \quad G_{\text{dB},2}(\omega) \underset{\text{HF}}{\sim} 0,}$$

ce qui correspond bien à une **asymptote BF de pente +40 dB/décade** et une **asymptote HF horizontale en 0 dB**.

6. On a

$$s(t) = \frac{E_0}{100}\cos\left(\omega_e t + \pi\right) + \frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos\left(10\omega_e t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{(ordre 2)}$$

$$s(t) = \frac{E_0}{10}\cos\left(\omega_e t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos\left(10\omega_e t + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(ordre 1)}$$

On remarque à nouveau que le filtre d'ordre 2 est **plus sélectif**.

Exercice 7 – Impédance d'entrée d'un oscilloscope

1. On passe en complexe et on utilise un pont diviseur de tension pour obtenir

$$\underline{s} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}}\underline{e}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}},} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

2. On étudie le comportement asymptotique :

- en BF :

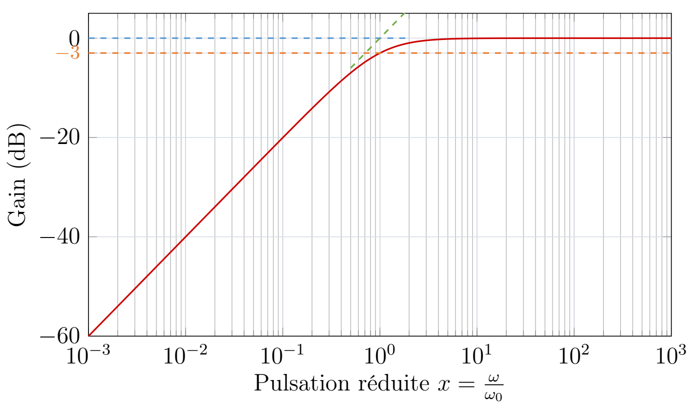
$$\underline{H}(j\omega) \underset{\text{BF}}{\sim} j\frac{\omega}{\omega_0}, \quad \text{d'où} \quad G_{\text{dB}}(\omega) \underset{\text{BF}}{\sim} 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad \text{et} \quad \varphi \underset{\text{BF}}{\sim} \frac{\pi}{2}\ ;$$

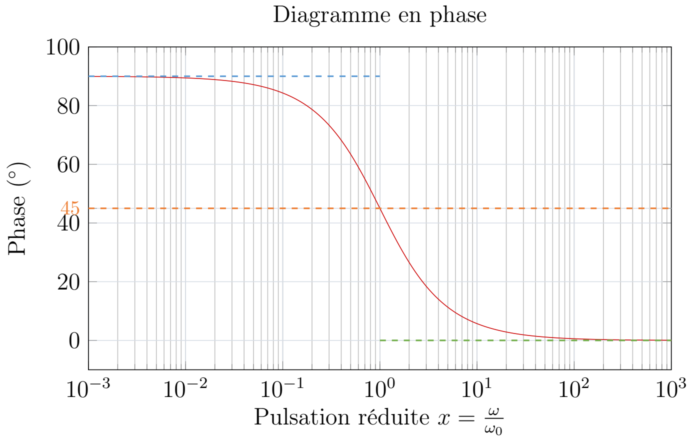
- en HF :

$$\underline{H}(j\omega) \underset{\text{HF}}{\sim} 1, \quad \text{d'où} \quad G_{\text{dB}}(\omega) \underset{\text{HF}}{\sim} 0 \quad \text{et} \quad \varphi \underset{\text{HF}}{\sim} 0.$$

La pulsation ω_0 correspond à la pulsation de coupure du filtre, où le déphasage vaut $\pi/4$. L'allure du digramme de Bode est représentée ci-dessous.

Diagramme en amplitude





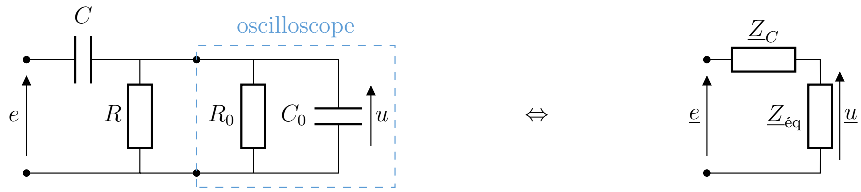
Il s'agit d'un filtre passe-haut du premier ordre.

3. La pulsation de coupure est ω_0, d'où

$$\boxed{f_c = \frac{\omega_0}{2\pi}.}$$

A.N. : $f_c = 3{,}2\,\mathrm{kHz}$.

4. On passe en complexe et on simplifie le circuit pour faire apparaitre un pont diviseur de tension.



On a alors

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{\underline{Z}_{\text{éq}} + \underline{Z}_C}\underline{e}, \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} + jC_0\omega = \frac{1}{R_{\text{éq}}} + jC_0\omega.$$

Après calcul on obtient

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{R_{\text{éq}}}{1 + jR_{\text{éq}}C_0\omega} \quad \text{et} \quad \underline{u} = \frac{jR_{\text{éq}}C\omega}{1 + jR_{\text{éq}}(C + C_0)\omega},$$

d'où

$$\boxed{\underline{\tilde{H}}(j\omega) = H_0 \frac{jR_{\text{éq}}(C + C_0)\omega}{1 + jR_{\text{éq}}(C + C_0)\omega}, \quad \text{avec} \quad H_0 = \frac{C}{C + C_0} \quad \text{et} \quad R_{\text{éq}} = \frac{RR_0}{R + R_0}.}$$

On retrouve un filtre passe-bas du premier ordre, mais dont la pulsation de coupure vaut cette fois

$$\omega_c' = \frac{1}{R_{\text{éq}}(C + C_0)}.$$

A.N. : $f_c' = 3{,}7\,\mathrm{kHz}$.

Comme vu dans le TP4, l'ajout d'un appareil de mesure n'est généralement pas anodin : il faut prendre en compte l'impédance d'entrée de l'appareil sous peine de commettre une erreur systématique lors des mesures.

5. Avec $R \ll R_0$ et $C \gg C_0$, on a

$$R_{\text{éq}} \approx R, \quad C + C_0 \approx C \quad \text{et} \quad H_0 \approx 1, \quad \text{d'où} \quad \underline{\tilde{H}}(j\omega) \approx \underline{H}(j\omega).$$

L'influence de l'oscilloscope devient alors négligeable. On veillera à ne pas prendre une valeur trop faible de R, sans quoi la résistance interne du GBF ($50\,\Omega$) ne pourra plus être négligée.

Exercice 8 – Conception d'un filtre de signaux acoustiques

1. On a

$$\underline{H}_1(jx) \underset{\text{BF}}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad \underline{H}_1(jx) \underset{\text{HF}}{\sim} \frac{1}{jx},$$

d'où

$$G_1(x) \underset{\text{BF}}{\sim} 0 \quad \text{et} \quad G_1(x) \underset{\text{HF}}{\sim} -20\log x,$$

ce qui correspond à une **asymptote BF horizontale en 0 dB** et une **asymptote HF de pente −20 dB/décade**.
À la fréquence de coupure, $x = 1$, d'où

$$\boxed{G_1(x=1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

2. On calcule le gain à 40 kHz. On trouve $1/\sqrt{5}$, ce qui correspond à un gain en décibel de -7 dB. Une atténuation de 7 dB est insuffisante pour le cahier des charges, puisqu'on veut atteindre au moins 10 dB. Avec un filtre d'ordre supérieur, l'asymptote HF est plus raide et permettra une atténuation plus importante au-delà de la fréquence de coupure.
3. On a

$$\underline{H}_2(jx) \underset{\text{BF}}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad \underline{H}_2(jx) \underset{\text{HF}}{\sim} -\frac{1}{x^2},$$

d'où

$$G_2(x) \underset{\text{BF}}{\sim} 0 \quad \text{et} \quad G_2(x) \underset{\text{HF}}{\sim} -40\log x,$$

ce qui correspond à une **asymptote BF horizontale en 0 dB** et une **asymptote HF de pente −40 dB/décade**.
Avec $f_c = 20$ kHz, le gain de ce filtre à 40 kHz vaut

$$G_2(x=2) = \frac{1}{\sqrt{9 + \frac{4}{Q^2}}}$$

et on veut $G_2(x=2) < 1/\sqrt{10}$, ce qui revient à

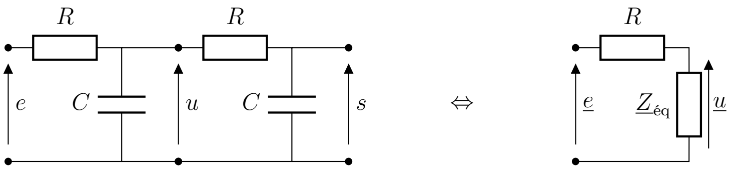
$$\boxed{Q < 2.}$$

Ce filtre peut convenir.
4. À la fréquence de coupure, on a $G_{\text{dB}}(x=1) = 20\log(Q)$ et on veut $G_{\text{dB}}(x=1) > -3$ dB, soit $Q > 10^{-3/20} \approx 0{,}7$. Finalement, le filtre convient si l'on choisit le facteur de qualité Q tel que

$$\boxed{0{,}7 < Q < 2.}$$

Exercice 9 – Filtres en cascade

1. On passe en complexe et on simplifie le circuit pour faire apparaitre un pont diviseur de tension.



On en déduit (...)

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{1 + jRC\omega}{-RC^2\omega^2 + 2jC\omega}, \quad \text{et} \quad \underline{u} = \frac{1 + jRC\omega}{1 - (RC\omega)^2 + 3jRC\omega}\underline{e},$$

d'où, avec un deuxième pont diviseur de tension

$$\underline{s} = \frac{1}{1 + jRC\omega}\underline{u} = \frac{1}{1 - (RC\omega)^2 + 3jRC\omega}\underline{e}.$$

La fonction de transfert du filtre s'écrit donc

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - (RC\omega)^2 + 3jRC\omega}.}$$

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas RC seul est

$$\underline{H}_{\text{PB1}}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}.$$

On remarque que

$$\underline{H}(j\omega) \neq \left(\underline{H}_{\text{PB1}}(j\omega)\right)^2 = \frac{1}{1 - (RC\omega)^2 + 2jRC\omega}.$$

La fonction de transfert de l'association des deux filtres est donc différente du produit des fonctions de transfert des filtres seuls, ce qui n'est pas étonnant. En effet,

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \underbrace{\frac{\underline{u}}{\underline{e}}}_{\neq \underline{H}_{\text{PB1}}} \times \underbrace{\frac{\underline{s}}{\underline{u}}}_{= \underline{H}_{\text{PB1}}}.$$

L'intensité du courant entre les deux filtres n'est pas nulle ce qui interdit l'utilisation directe d'un pont diviseur de tension : **la présence du second filtre modifie le premier**.

2. Cette fois, l'intensité du courant entrant dans le suiveur est nulle, car son impédance d'entrée est infinie. On peut donc utiliser un pont diviseur de tension. On a donc

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{u}_1}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}.$$

Pour le deuxième filtre, on a toujours

$$\underline{H}_2(j\omega) = \frac{\underline{u}_2}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}.$$

Finalement, la nouvelle fonction de transfert s'écrit

$$\underline{H}'(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{u}_1}{\underline{e}} \times \frac{\underline{s}}{\underline{u}_1} \underset{u_1=u_2}{=} \frac{\underline{u}_1}{\underline{e}} \times \frac{\underline{s}}{\underline{u}_2} = \underline{H}_1(j\omega) \times \underline{H}_2(j\omega).$$

On a donc

$$\boxed{\underline{H}'(j\omega) = \left(\underline{H}_{\text{PB1}}(j\omega)\right)^2.}$$

Avec l'utilisation du suiveur, la fonction de transfert totale s'écrit bien comme le produit des fonctions de transfert des filtres seuls. On voit bien ici l'intérêt du suiveur, qui n'est pas nécessairement évident de prime abord en raison de sa fonction de transfert triviale. C'est un élément important qui permet de découpler les différentes parties d'un circuit de manière à ce que l'ajout d'un module ne perturbe pas le comportement du précédent.

Exercice 10 – Fonctions de transfert et diagramme de Bode

La méthode est toujours la même. Pour déterminer la fonction de transfert, on passe en complexe, on simplifie le circuit et on utilise des ponts diviseurs de tension (ou les lois de Kirchhoff). Le tracé du diagramme de Bode se fait en étudiant le comportement asymptotique du filtre, de manière à obtenir l'équation des asymptotes BF et HF. Finalement, on vérifie qualitativement les résultats obtenus par une étude rapides des circuits équivalents BF et HF.

1. Pour le filtre de Colpitts, on obtient

$$\boxed{\underline{H}_C(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)},}$$

avec

$$H_0 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{et} \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

On reconnait la fonction de transfert d'un filtre passe-bande du second ordre, qui présente des asymptotes de $\pm 20\,\mathrm{dB/d\acute{e}cade}$ en BF et HF. Les diagrammes de Bode représentés ci-dessous sont tracés pour $H_0 = 1/2$ et pour $Q = 0{,}1$, $1/\sqrt{2}$ et 10.

2. Pour le filtre de Hartley, on obtient

$$\boxed{\underline{H}_H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)},}$$

avec

$$H_0 = \frac{L_2}{L_1 + L_2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{et} \quad L = L_1 + L_2.$$

On reconnait à nouveau la fonction de transfert d'un filtre passe-bande du second ordre. Les diagrammes de Bode représentés ci-dessous sont tracés pour $H_0 = 1/2$ et pour $Q = 0{,}1$, $1/\sqrt{2}$ et 10.

Diagramme en amplitude

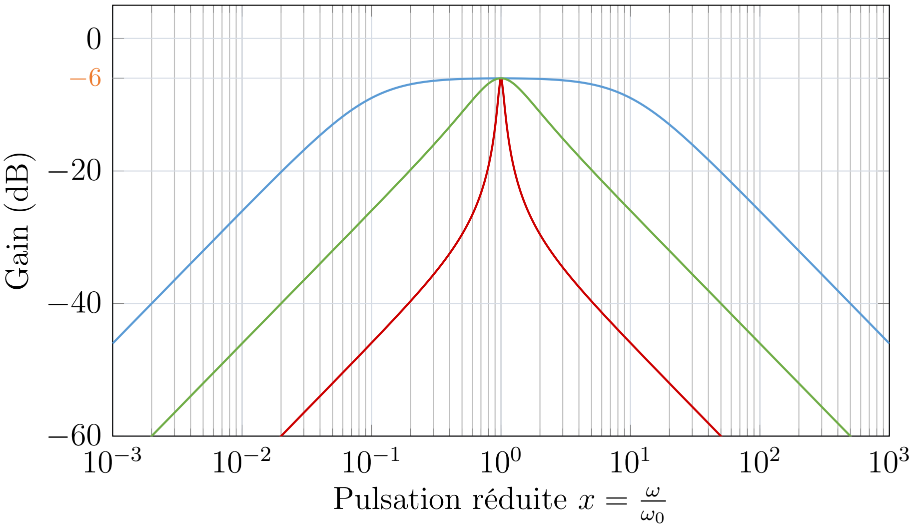
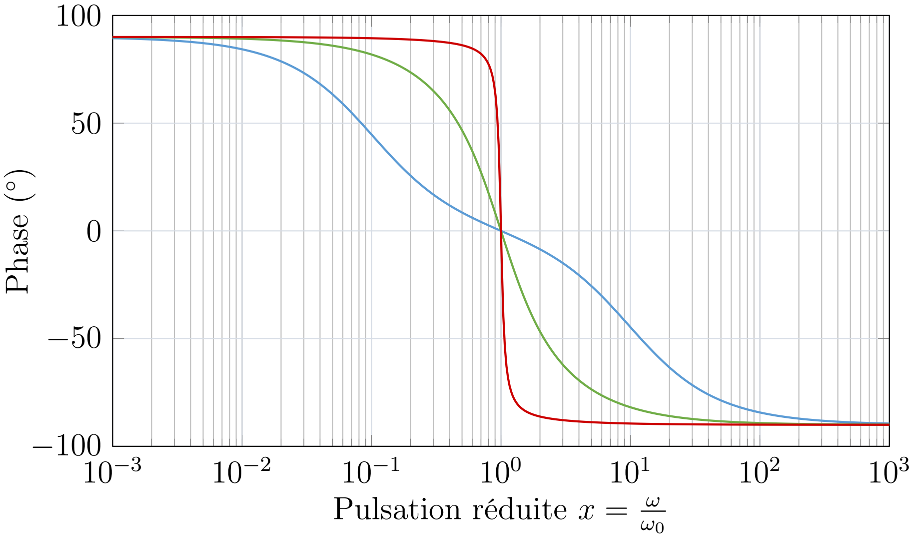


Diagramme en phase



L'analyse des circuits équivalents BF et HF est cohérente avec ces résultats.