DS5 – Thermodynamique, RSF et filtrage
Correction

Exercice 1 – Calorimétrie adiabatique

1. Le premier principe s'écrit alors

$$\boxed{\Delta U = W + Q.}$$

Un transfert thermique est un transfert d'énergie qui se fait sans l'action d'une force macroscopique, contrairement au travail.

2. Pour une transformation quasi-statique isobare, le travail des forces de pression s'écrit

$$W = -P\Delta V = -\Delta(PV).$$

Le premier principe s'écrit alors

$$\Delta U = -\Delta(PV) + Q, \quad \text{d'où} \quad \Delta(\underbrace{U + PV}_{H}) = Q.$$

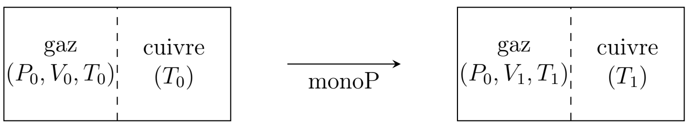
On retrouve donc l'expression du premier principe sur l'enthalpie

$$\boxed{\Delta H = Q.}$$

3. Avec la relation de Mayer, on retrouve

$$\boxed{C_{\text{v,m}} = \frac{R}{\gamma - 1}} \quad \text{et} \quad \boxed{C_{\text{p,m}} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}.}$$

4. On considère le système {gaz + cuivre} qui subit la transformation



avec $V_1 = 0{,}95V_0$.
Puisque les pressions initiales et finales sont égales, on a en appliquant la loi des GP au gaz

$$\frac{T_1}{V_1} = \frac{T_0}{V_0}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{T_1 = \frac{V_1}{V_0}T_0 = 0{,}95T_0.}$$

A.N. : $T_1 = 12\,°\text{C}$.
Rq : l'hypothèse monoP suffit pour la suite de l'exercice, mais on peut raisonnablement supposer que la transformation est QS et isoP.

5. Par additivité de l'enthalpie, on a

$$\boxed{\Delta H = \left(\frac{n\gamma R}{\gamma - 1} + mc\right)(T_1 - T_0) = C'\Delta T,} \quad \text{avec} \quad C' = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} + mc.$$

6. La transformation est au moins monoP avec équilibre mécanique à l'E.I. et l'E.F., d'où, en appliquant le premier principe sur l'enthalpie

$$\boxed{\Delta H = Q.}$$

A.N. : $Q = -1{,}99\,\mathrm{kJ} < 0$: le système a cédé de l'éenergie sous la forme d'un transfert thermique à l'extérieur.

7. On a

$$\Delta U = C\Delta T \quad \text{avec} \quad C = \frac{nR}{\gamma - 1} + mc.$$

A.N. : $\Delta U = -1{,}87\,\mathrm{kJ}$.
Avec le premier principe, on a

$$\Delta U - \Delta H = W,$$

où W est le travail des forces de pression.
D'après ce qui précède,

$$\delta U - \Delta H = -nR\Delta T.$$

D'autre part, pour une transformation monoP

$$W = -P_0(V_1 - V_0) = -nR(T_1 - T_0).$$

On retrouve bien

$$\boxed{\Delta U - \Delta H = W.}$$

Exercice 2 – Résonance du circuit RLC parallèle

1. On a

$$\boxed{\underline{Z}_R = R, \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_L = jL\omega.}$$

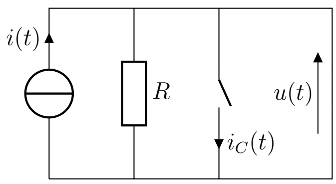
2. En BF :

- la bobine est équivalente à un fil ;
- le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

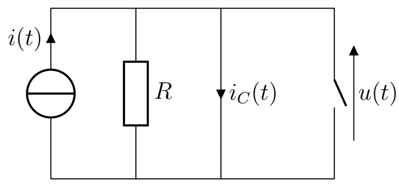
En HF :

- le condensateur est équivalent à un fil ;
- la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert.

3. Le circuit devient



BF



HF

On a donc

$$u(t) \underset{\text{BF}}{\rightarrow} 0, \quad i_C(t) \underset{\text{BF}}{\rightarrow} 0, \quad u(t) \underset{\text{HF}}{\rightarrow} 0 \quad \text{et} \quad i_C(t) \underset{\text{HF}}{\rightarrow} i(t).$$

4. On a (...)

$$\boxed{\underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{jL\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}.}$$

5. Par définition

$$\underline{u}(t) = \underline{Z}_{\text{éq}}\underline{i}(t), \quad \text{d'où} \quad \boxed{\underline{u}(t) = \frac{jL\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}\underline{i}(t).}$$

6. En divisant au numérateur et au dénominateur par $j\frac{L}{R}\omega$, on obtient

$$\underline{u}(t) = \frac{R\underline{i}(t)}{1 - j\frac{R}{L\omega} + jRC\omega} = \frac{R\underline{i}(t)}{1 + jR\sqrt{\frac{C}{L}}\left(\sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{LC}\omega}\right)} = \frac{A\underline{i}(t)}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)},$$

avec $x = \omega/\omega_0$. On identifie :

$$A = R, \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

7. On en déduit

$$\boxed{U_m = \frac{RI_0}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}.}$$

8. Cf. Fig. 1.

9. L'amplitude U_m est maximale si $x = 1$, soit pour $\omega = \omega_0$. Il s'agit de la pulsation de résonance

$$\omega_r = \omega_0.$$

10. Les pulsations de coupure sont les valeurs ω_c de ω pour lesquelles

$$U_m(\omega_c) = \frac{RI_0}{\sqrt{2}}.$$

La bande passante est la plage de fréquence sur laquelle

$$U_m(\omega) \geqslant \frac{RI_0}{\sqrt{2}}.$$

11. Cf. TD E4 Ex. 9.

$$\boxed{\omega_{c1} = \omega_0\left(\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}}-\frac{1}{2Q}\right) \quad \text{et} \quad \omega_{c2} = \omega_0\left(\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}}+\frac{1}{2Q}\right).}$$

12. On en déduit

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_{c2}-\omega_{c1} = \frac{\omega_0}{Q}.}$$

13. Cf. Fig. 1.

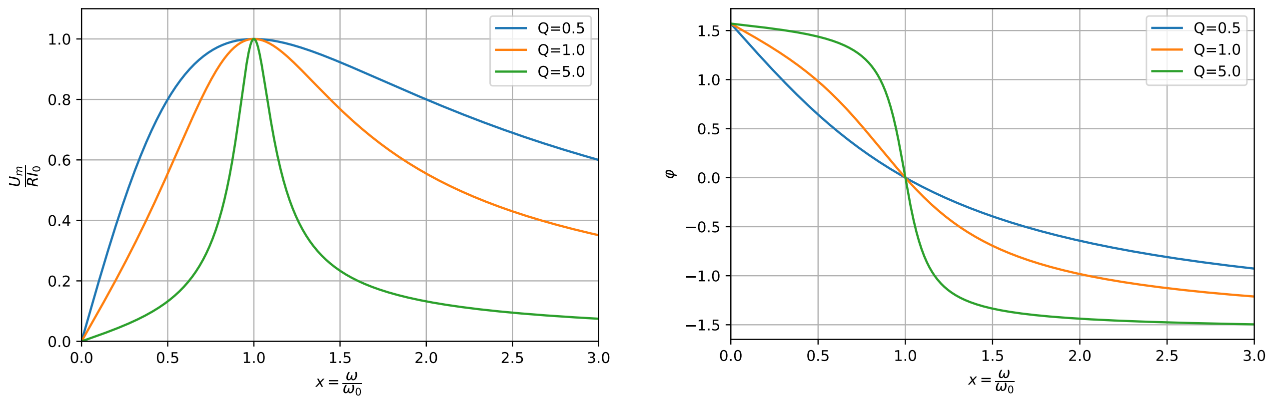


FIGURE 1 – Amplitude et phase de la tension $u(t)$ au voisinage de la résonance.

Exercice 3 – Pickup de guitare électrique

1. Il s'agit d'un **filtre passe-bas d'ordre 2**.
2. La pente de l'asymptote haute-fréquence est de $-40\,\mathrm{dB/décade}$. On en déduit

$$\boxed{G_{\mathrm{dB}}(f) \underset{\mathrm{BF}}{\sim} 0\,\mathrm{dB} \quad \text{et} \quad G_{\mathrm{dB}}(f) \underset{\mathrm{HF}}{\sim} -40\log\left(\frac{f}{f_0}\right).}$$

3. On a

$$\underline{H}(j\omega) \underset{\mathrm{BF}}{\sim} H_0 \quad \text{et} \quad \underline{H}(j\omega) \underset{\mathrm{HF}}{\sim} -H_0\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2.$$

On en déduit

$$G(\omega) \underset{\mathrm{BF}}{\rightarrow} H_0 \quad \text{et} \quad G(\omega) \underset{\mathrm{HF}}{\rightarrow} 0.$$

Il s'agit donc bien d'un filtre passe-bas. De plus il est du deuxième ordre car le dénominateur de la fonction de transfert est un polynôme de degré 2 en $j\omega$, tandis que le numérateur est d'ordre 0.

4. Avec les équivalents BF et HF déterminés précédemment, on obtient

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega) \underset{\mathrm{BF}}{\sim} 20\log H_0 \quad \text{et} \quad G_{\mathrm{dB}}(\omega) \underset{\mathrm{HF}}{\sim} 20\log H_0 - 40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

De plus, en ω_0

$$\underline{H}(j\omega_0) = -jQH_0, \quad \text{d'où} \quad G_{\mathrm{dB}}(\omega_0) = 20\log(QH_0).$$

La résonance est plutôt étroite sur la figure 1 : on en déduit

$$f_0 \approx 3\,\mathrm{kHz}.$$

On remarque de plus que le gain BF vaut $0\,\mathrm{dB}$, d'où $H_0 = 1$, et que le gain à résonance vaut $14\,\mathrm{dB}$. On en déduit

$$Q = 10^{\frac{14}{20}} \approx 5.$$

Le facteur de qualité est relativement grand, de sorte que la fréquence de résonance est bien proche de f_0.

5. On a

Fréquence	f_1	f_2	f_3
G_{dB} (dB)	0	14	−15
G	1	5	0,2
U_s (V)	1	5	0,2

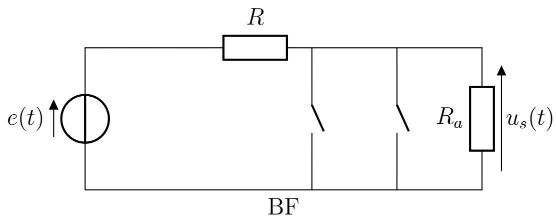
6. Les harmoniques sont toutes espacées de la fréquence f_e du mode fondamental. On mesure $12f_e \approx 4\,\mathrm{kHz}$, d'où

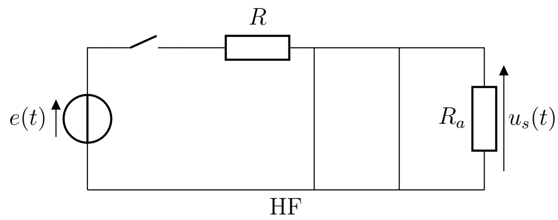
$$f_0 \approx 333\,\mathrm{Hz}.$$

7. Les harmoniques de fréquence inférieure à 2 kHz sont peu ou pas modifiées par le filtre. Celles autour de 3 kHz sont amplifiées et celles de fréquence supérieure à 4 kHz sont de plus en plus atténuées.

L'amplitude du fondamental reste inchangée soit 41 dB. Celle de l'harmonique à 3 kHz est amplifiée de 14 dB et atteint donc un amplitude de 16 dB. Enfin, l'harmonique à 8 kHz est atténuée de 15 dB et son amplitude atteint −34 dB.

8. On représente les circuits équivalents basse et haute fréquence :





Les circuits équivalents montrent que

$$u_s(t) \underset{\text{BF}}{\rightarrow} \frac{R_a}{R+R_a} e(t) \quad \text{et} \quad u_s(t) \underset{\text{HF}}{\rightarrow} 0.$$

Il s'agit donc bien d'une filtre passe-bas.

De plus la présence d'une bobine et d'un condensateur dans le même circuit incite à penser qu'il s'agit d'un filtre d'ordre 2.

Rq : Le gain basse fréquence est inférieur à 1, contrairement au filtre de la figure 1.

9. Le diagramme de Bode du filtre réalisé avec $R_a = 10\,\text{M}\Omega$ et un rapport $C_c/C = 8$ fait apparaitre une fréquence de résonance proche de 2,2 kHz, alors qu'avec un rapport $C_c/C = 5$, la fréquence de résonance approche de 2,8 kHz. Choisir $C_c/C \approx 6$ semble un bon compromis.

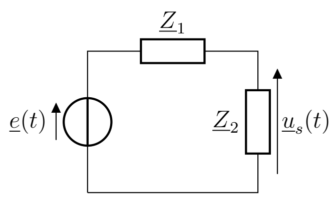
Par ailleurs, on a $20 \log 5 \approx 14$. Le diagramme de Bode du filtre réalisé avec $C_c = 470\,\mu\text{F}$ et un rapport $R/R_a = 5 \times 10^{-3}$ présence le gain à résonance de 17 dB. On remarque aussi que le gain à résonance diminue quand R/R_a augmente : on peut choisir $R/R_a \approx 6 \times 10^{-3}$.

On retient donc

$$C_c \approx 6C = 600\,\text{pF} \quad \text{et} \quad R_a \approx \frac{R}{6 \times 10^{-3}} = 1\,\text{M}\Omega.$$

10. On simplifie le circuit en faisant apparaitre les impédances équivalentes $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ à l'association série de L et R d'une part et l'association parallèle de C, C_c et R_a d'autre part, avec

$$\underline{Z}_1 = R + jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = \frac{R_a}{1 + jR_aC_{\text{tot}}\omega}, \quad \text{où} \quad C_{\text{tot}} = C + C_c.$$



On reconnait alors un pont diviseur de tension, d'où

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \cdots = \frac{\frac{R_a}{R_a+R}}{1 + j\frac{L+RR_aC_{\text{tot}}}{R_a+R}\omega - \frac{R_aLC_{\text{tot}}}{R_a+R}\omega^2}.$$

On identifie

$$\boxed{H_0 = \frac{R_a}{R_a+R},} \quad \frac{1}{Q\omega_0} = \frac{L+RR_aC_{\text{tot}}}{R_a+R} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{R_aLC_{\text{tot}}}{R_a+R},$$

d'où (...)

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{R_a+R}{R_aLC_{\text{tot}}}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{R_a(R_a+R)LC_{\text{tot}}}}{L+RR_aC_{\text{tot}}}.}$$

11. Avec $R/R_a \ll 1$, on a $R + R_a \approx R_a$, d'où

$$H_0 \approx 1, \quad \omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC_{\text{tot}}}} \quad \text{et} \quad Q \approx \frac{\sqrt{LC_{\text{tot}}}}{\frac{L}{R_a} + RC_{\text{tot}}}.$$

A.N. : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 3{,}0\,\text{kHz}$ et $Q \approx 14$ d'où $20\log Q \approx 23$ avec $C_c = 470\,\text{pF}$ et $R_a = 10\,\text{M}\Omega$. On retrouve bien les ordres de grandeur des valeurs relevés sur les courbes (fréquence de résonance et gain à résonance).

12. On remarque que, toujours dans la limite où $R/R_a \ll 1$, ω_0 diminue quand C_{tot} augmente, donc quand C_c augmente. C(est bien ce que l'on observe sur le diagramme de Bode à droite de la figure 4.

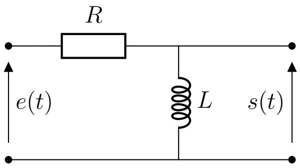
13. L'amplitude du signal de sortie dépend, à résonance, du facteur de qualité. Plus il est grand, plus le signal de sortie sera amplifié. Or, toujours dans la limite $R/R_a \ll 1$, Q augmente si R_a augmente.

On peut donc ajouter entre le câble et l'amplificateur un potentiomètre de résistance R_p variable. Celle-ci s'ajoute alors à R_a et permet d'augmenter la gain à résonance.

Rq : En réalité, on intercale un potentiomètre en parallèle de C sur la sortie duquel est branchée l'association série de C_c et R_a. Le comportement fréquentiel est alors légèrement modifié quand on règle l'amplitude de sortie à l'aide du potentiomètre. Le réglage de la fréquence n'est pas effectué en changeant une capacité mais en changeant (avec un potentiomètre) la résistance d'une association série résistance variable/condensateur fixé. L'étude est de nouveau plus compliquée mais les principes généraux restent valables.

Exercice 4 – Filtre passe-haut du premier ordre

1. Le circuit ci-dessous convient.



2. On a

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}, \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{R}{L}.}$$

3. Cf. cours.
4. On a

Pulsation	0	ω_0	$10\omega_0$
$\underline{H}$	0	$\frac{j}{1+j}$	$\frac{10j}{1+10j} \approx 1$
G	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	≈ 1
φ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	≈ 0

d'où

$$\boxed{s1(t) \approx \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) + E_0 \cos(10\omega_0 t).}$$

5. Ici, il faut commencer par linéariser l'expression :

$$e_2(t) = \frac{E_0}{2}\left(1 + \cos(\omega_0 t)\right).$$

On en déduit

$$\boxed{s_2(t) = \frac{E_0}{2\sqrt{2}} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right).}$$