DS5 – Thermodynamique, RSF et filtrage

Durée : 4h.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Si au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

RCO Des questions de cours sont identifiées dans le sujet par le sigle RCO dans la marge.

Critères d'évaluation de la présentation

Présentation générale	La copie est propre, aérée et lisible. L'orthographe est correcte. Les expressions littérales sont encadrées et les A.N. soulignées. Les pages sont numérotées.
Rédaction	Le vocabulaire scientifique est précis. Les réponses sont claires, explicites et succinctes. Les lois, principes et théorèmes utilisés sont nommés.
Schémas	Les schémas sont suffisamment grands : plus petit que la carte étudiant = invisible. Les schémas sont soignés : règle et compas. Utilisation pertinente de la couleur.
Expressions littérales	Le résultat est celui demandé par l'énoncé. Les notations de l'énoncé sont respectées. Les expressions sont homogènes. Respect des notations : grandeurs algébriques, vectorielles, scalaires, etc. Pas de mélange entre les A.N. et E.L.
Applications numériques	La valeur numérique est accompagnée de son unité. L'A.N. est complète : pas de fraction restante, etc. Le nombre de chiffres significatifs est adapté. Les conversions sont effectuées correctement.
Représentations graphiques	Le graphique est suffisamment grand. Les axes sont tracés à la règle, nommés et les unités sont indiquées (si A.N.). Les limites et valeurs notables, les comportements asymptotiques sont respectés. Les courbes sont tracées à main levée, les droites à la règle, etc.

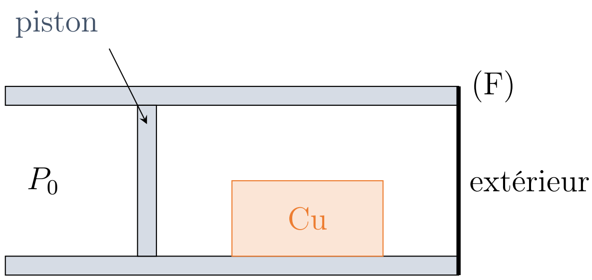
Exercice 1 – Calorimétrie adiabatique

RCO **1.** Rappeler l'expression du premier principe de la thermodynamique entre deux états d'équilibre quelconques d'un système fermé globalement immobile. Expliquer simplement la différence entre travail et transfert thermique.

On s'intéresse à des systèmes caractérisés par les variables d'état suivantes : pression P, volume V et température T. Le seul travail agissant sur ces systèmes est celui des forces de pression.

RCO **2.** À partir de l'expression précédente, démontrer la relation entre la variation d'enthalpie du système et le transfert thermique dans le cas particulier d'une transformation quasi-statique isobare.

Le système étudié est constitué de n moles d'air assimilé à un gaz parfait et d'une masse m de cuivre solide. Il est placé dans un cylindre schématisé ci-dessous. On précise que le piston est mobile sans frottement, que les autres parois sont fixes et que les éléments grisés sont athermanes (imperméables aux transferts thermiques) tandis que la paroi (F) permet ce type d'échange.



On donne le coefficient isentropique du gaz $\gamma = C_\text{p}/C_\text{v} = 7/5$, la constante des gaz parfaits $R = 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, $n = 1{,}00\,\text{mol}$, $m = 269\,\text{g}$ et la capacité thermique massique du cuivre $c = 385\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$. La pression atmosphérique P_0 est constante.

RCO **3.** Établir dans le cas du gaz parfait les expressions des capacités molaires $C_{\text{v,m}}$ et $C_{\text{p,m}}$ en fonction de γ et R.

4. La température extérieure étant restée très longtemps égale à T_0, le fond (F) du cylindre est mis en contact avec un thermostat à la température T_1. On laisse le système atteindre l'équilibre. Le volume V occupé par le gaz subit une diminution relative de $5\,\%$ à partir de la valeur initiale V_0. En déduire la température finale T_1 en degrés Celsius si $T_0 = 27\,°\text{C}$.

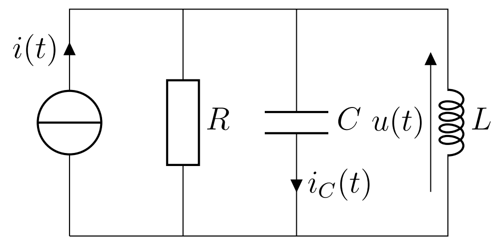
5. Exprimer la variation d'enthalpie du système lors de la transformation décrite ci-dessus en fonction des températures et des autres données sous la forme $\Delta H = C'\Delta T$. Quelle(s) propriété(s) essentielle(s) de l'enthalpie utilise-t-on ?

6. En déduire l'expression du transfert thermique Q algébriquement reçu par le système à travers (F). Donner sa valeur numérique et interpréter son signe.

7. Exprimer et calculer la variation d'énergie interne ΔU du système. Interpréter la différence entre ΔU et ΔH dans le cadre du premier principe.

Exercice 2 – Résonance du circuit RLC parallèle

On considère le circuit RLC parallèle alimenté par une source idéale de courant représenté ci-contre. Le générateur fournit un courant d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$. On note $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ la tension aux bornes de la bobine et $i_C(t)$ l'intensité du courant qui traverse le condensateur. On prendra $\varphi \in]-\pi, \pi]$.



Étude qualitative

RCO **1.** Donner l'expression des impédances complexes de la résistance, de la bobine et du condensateur.

RCO **2.** Rappeler les comportements équivalents à basse fréquence et à haute fréquence de la bobine et du condensateur.

3. À l'aide de circuits équivalents, exprimer les amplitudes U_m et I_m de la tension $u(t)$ aux bornes de la bobine et de l'intensité $i_C(t)$ du courant qui traverse le condensateur à basse fréquence et à haute fréquence.

Résonance en tension du circuit

4. Établir l'expression de l'impédance équivalente $\underline{Z}_{\text{éq}}$ à l'association parallèle des trois dipôles R, L et C.

5. En déduire l'expression de l'amplitude complexe $\underline{u}(t)$ de la tension $u(t)$ en fonction de $\underline{i}(t)$, L, C, R et ω.

6. Montrer alors que l'on peut mettre $\underline{u}(t)$ sous la forme

$$\underline{u}(t) = \frac{A\underline{i}(t)}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}, \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Préciser les expressions des constantes A, Q et ω_0 en fonction de R, L et C.

On pourra admettre cette expression pour la suite des questions.

7. En déduire l'expression de l'amplitude réelle U_m en fonction notamment de Q et x.

8. Représenter graphiquement l'allure de U_m en fonction de x.

9. Déterminer l'expression de la pulsation ω_r, valeur de ω pour laquelle on observe une résonance en tension.

RCO **10.** Définir une pulsation de coupure et la bande passante de la résonance.

11. Établir l'expression des deux pulsations de coupure ω_{c1} et $\omega_{c2} > \omega_{c1}$ en fonction de ω_0 et Q.

12. En déduire l'expression de la largeur de la bande passante $\Delta\omega$ en fonction des mêmes paramètres.

13. Étudier l'argument du nombre complexe $1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)$ en fonction de x.

14. En déduire le graphe de φ en fonction de x.

Exercice 3 – Pickup de guitare électrique

On étudie le comportement fréquentiel d'un « pickup » de guitare électrique, c'est-à-dire du composant qui génère le signal électrique reproduisant les vibrations mécaniques de la corde.

Étude générale

On considère un filtre amplificateur de tension dont le diagramme de Bode du gain en décibel est représenté sur la figure 1.

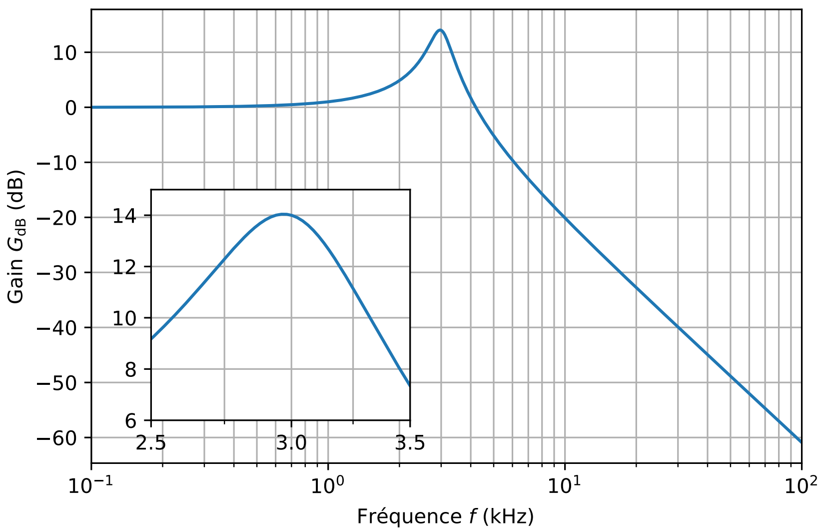


FIGURE 1 – Diagramme de Bode en gain d'un filtre. L'encart en bas à gauche de la figure principale est un agrandissement de la courbe autour de $f = 3\,\mathrm{kHz}$.

1. Indiquer la nature et l'ordre de ce filtre.
2. Déterminer la pente de l'asymptote haute fréquence. En déduire l'équation des asymptotes basse et haute fréquence, c'est-à-dire l'expression de G_{dB} en fonction de $\log\left(\frac{f}{f_0}\right)$ dans ces deux régimes.
3. Justifier que la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

est celle d'un filtre du même type que celui du diagramme précédent. Dans cette expression Q et H_0 sont des réels positifs sans dimension, ω_0 est une pulsation positive.

4. Déterminer les équations de ses asymptotes à basse et haute fréquence ainsi que l'expression de $\underline{H}$ pour $\omega = \omega_0$. En déduire les valeurs de Q et de $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ pour le diagramme de la figure 1.

Filtrage d'un signal

On envoie en entrée du filtre de la figure 1 un signal sinusoïdal $u_e(t)$, d'amplitude $U_e = 1\,\mathrm{V}$ et de fréquence f variable.

5. Déterminer l'amplitude U_s de la tension de sortie $u_s(t)$, si $f = f_1 = 300\,\text{Hz}$, $f = f_2 = 3\,\text{kHz}$ et finalement $f = f_3 = 8\,\text{kHz}$.

On considère un signal électrique périodique dont le spectre est donné sur la figure 2, caractéristique de la vibration d'une corde de guitare.

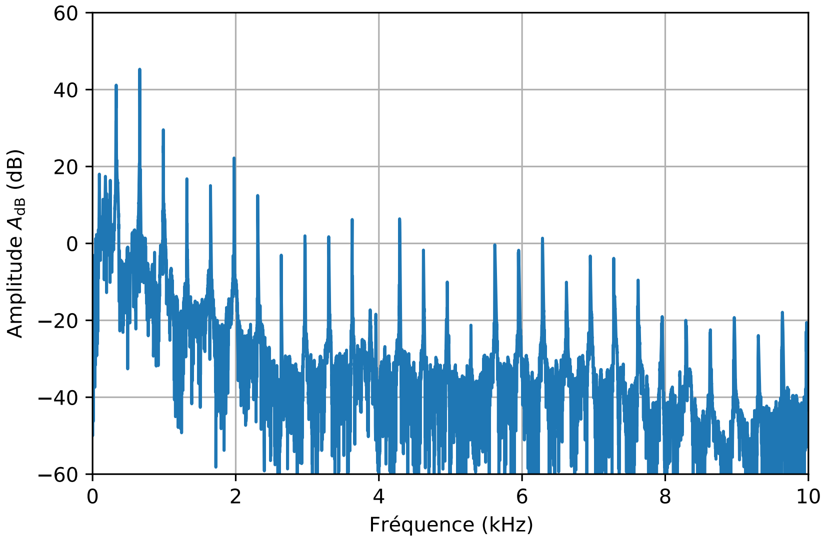


FIGURE 2 – Spectre du signal sonore d'une corde de guitare. L'abscisse représente la fréquence de ses composantes sinusoïdales et l'ordonnée donne l'amplitude A_{dB} de ces composantes en décibel, définie par $A_{\text{dB}} = 20\log(U/U_{\text{ref}})$, avec U l'amplitude en volts et $U_{\text{ref}} = 10\,\text{mV}$.

6. Déterminer la fréquence du mode fondamental.
7. Tracer schématiquement l'allure du spectre de ce signal s'il est filtré par le filtre de la figure 1. On donnera en particulier les amplitudes (en dB) du fondamental et de chacune des harmoniques les plus proches de 3 kHz et de 8 kHz.

Modèle électrocinétique du pickup

On peut modéliser le « pickup » branché sur un amplificateur de guitare par le circuit de la figure 3 dans lequel la source de tension sinusoïdale $e(t)$ génère un signal d'amplitude constante E quelle que soit la fréquence. On s'intéresse à la fonction de transfert $\underline{u_s}/\underline{e}$.

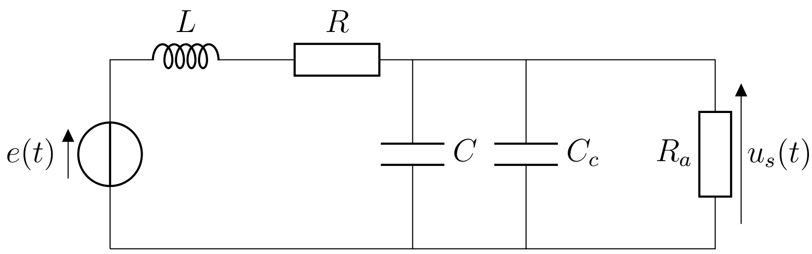


FIGURE 3 – Modèle électrocinétique du pickup. La bobine $L = 5\,\text{H}$, le résistor $R = 6\,\text{k}\Omega$ et le condensateur $C = 100\,\text{pF}$ caractérisent le « pickup » ; le condensateur C_c caractérise la capacité du câble reliant la guitare à l'amplificateur et le résistor R_a caractérise la résistance d'entrée de l'amplificateur.

8. Justifier sans calcul que ce circuit a la même nature que le filtre dont le gain est tracé sur la figure 1.

9. La figure 4 représente les diagrammes de Bode du circuit précédent, quand on fait varier R_a (avec $C_c = 470\,\mathrm{pF}$) pour l'un et quand on fait varier C_c (avec $R_a = 10\,\mathrm{M\Omega}$) pour l'autre. Proposer des valeurs pour R_a et C_c donnant une résonance à 2,5 kHz (le son est alors dit «brillant») avec une surtension d'un facteur 5 à la résonance, c'est-à-dire telle qu'un signal sinusoïdal résonant est amplifié d'un facteur 5 par rapport à un signal à basse fréquence.

10. Établir l'expression de la fonction de transfert du circuit de la figure 3 et la mettre sous la forme indiquée à la question 3. On précisera les expressions de H_0, Q et ω_0.

11. Simplifier les expressions du facteur de qualité Q et de la pulsation propre ω_0 pour retrouver les ordres de grandeur de Q et ω_0 sur les diagrammes correspondant à $R_a = 10\,\mathrm{M\Omega}$. On utilisera le fait que R/R_a est alors très petit devant 1.

12. Justifier également le sens de variation de ω_0 avec C_c.

13. Comment modifier le montage précédent avec un potentiomètre (une résistance variable) pour faire varier l'amplitude du signal de sortie sans changer la réponse fréquentielle.

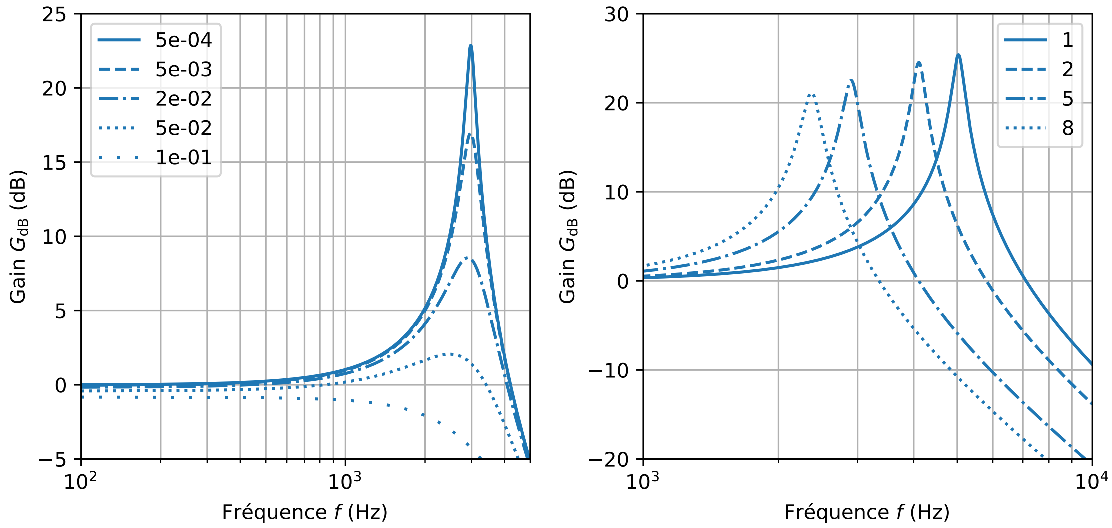


FIGURE 4 – Diagrammes de Bode en gain du circuit modèle du pickup pour (à gauche) $C_c = 470\,\mathrm{pF}$ et (à droite) $R_a = 10\,\mathrm{M\Omega}$. Les légendes indiquent les valeurs des rapports R/R_a (à gauche) et C_c/C (à droite).

Exercice 4 – Filtre passe-haut du premier ordre

1. Proposer un circuit permettant d'obtenir un filtre passe-haut d'ordre 1 avec une bobine d'inductance L et une résistance R.

RCO 2. Établir la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ de ce filtre et la mettre sous forme canonique. On fera apparaitre une pulsation caractéristique ω_0 dont on donnera l'expression en fonction de R et L.

RCO 3. Tracer, en le justifiant, le diagramme de Bode asymptotique en gain et en phase. En déduire l'allure du diagramme de Bode réel.

RCO 4. On impose une tension $e_1(t)$ périodique à l'entrée du montage de la forme

$$e_1(t) = E_0 + E_0 \cos(\omega_0 t) + E_0 \cos(10\omega_0 t).$$

Déterminer la sortie $s_1(t)$ associée.

5. On impose cette fois une tension $e_2(t)$, toujours périodique à l'entrée du montage de la forme

$$e_2(t) = E_0 \cos^2\left(\frac{\omega_0}{2} t\right).$$

Déterminer la sortie $s_2(t)$ associée. Représenter les spectres en amplitude de e_2 et s_2.