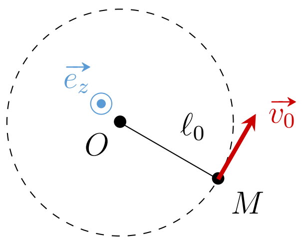
TD M5 – Moment cinétique

★☆☆ Exercice 1 – Le pendule simple

Retrouver l'équation du mouvement d'un pendule simple en utilisant tour à tour le PFD, le TPC, le TEM puis le TMC.

★☆☆ Exercice 2 – Sphère attachée à un fil

Une sphère de petite taille et de masse $m = 100\,\mathrm{g}$, assimilée à un point matériel M, est attachée à l'extrémité d'un fil inextensible, de longueur $\ell_0 = 1{,}0\,\mathrm{m}$ et de masse négligeable, dont l'autre l'extrémité est fixée en O. Elle se déplace sans frottement sur un cercle horizontal de rayon ℓ_0 à la vitesse $v_0 = 1{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.



1. Déterminer son moment cinétique par rapport à O puis par rapport à (Oz).
2. On réduit la longueur du fil à $\ell_1 = 0{,}50\,\mathrm{m}$. Déterminer alors la vitesse v_1 de la sphère.
3. Comparer l'énergie cinétique avant et après la réduction de la longueur du fil.
4. Comment expliquer cette variation d'énergie cinétique ?

★★☆ Exercice 3 – Vitesse à la sortie d'un toboggan

Un enfant glisse assis le long d'un toboggan. Celui-ci est une portion de cercle de centre O et de rayon $2{,}7\,\mathrm{m}$. Le centre de gravité de l'enfant, noté G, glisse tout au long de la descente à $20\,\mathrm{cm}$ au dessus du toboggan. L'angle que fait le rayon OG de la trajectoire de l'enfant avec l'horizontale est noté θ. On considère que tout frottement est négligeable.

Initialement, l'enfant s'élance d'une position $\theta_0 = 15°$, sans vitesse initiale. En sortie du toboggan, l'angle θ vaut $90°$.

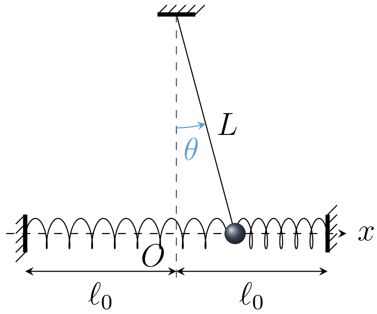
1. Indiquez sur un schéma les forces qui s'exercent sur G.
2. Déterminer l'équation de son mouvement en utilisant un théorème du moment cinétique.
3. En déduire l'expression de la vitesse de l'enfant en fonction de l'angle θ.
4. Calculer la vitesse maximale atteinte par l'enfant. Commenter.

★★☆ Exercice 4 – Pendule conique

Un point matériel M de masse m est attaché à un point O fixe par l'intermédiaire d'un fil inextensible, sans masse, de longueur L. Le point M décrit des cercles horizontaux à vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical (Oz). On note α l'angle d'inclinaison du fil par rapport à la verticale.

1. Exprimer le moment cinétique de M en O en coordonnées cylindriques.
2. Appliquer le TMC et en déduire une relation entre α, ω, L, et g.
3. À quelle condition sur ω la situation précédente est-elle possible ?
4. Que se passe-t-il si $\omega \to +\infty$?

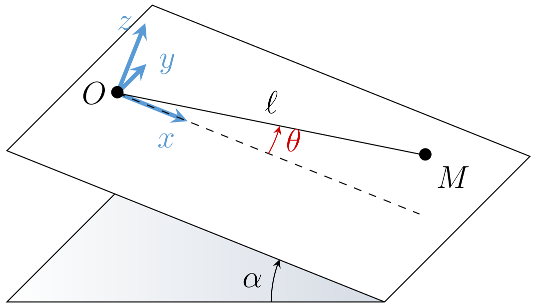
★★☆ Exercice 5 – Pendule simple couplé à des ressorts



On considère le dispositif représenté ci-contre. Les deux ressorts sont identiques (raideur k et longueur à vide ℓ_0) et on écarte légèrement la masse m supposée ponctuelle de sa position d'équilibre $x = 0$.

1. Justifier que pour des oscillations de faible amplitude, le mouvement peut être considéré horizontal.
2. Montrer que dans ce cas, on a $x \approx L\theta$ et $\vec{v} \approx L\dot{\theta}\vec{e_x}$.
3. En appliquant le TMC, déterminer une équation différentielle sur θ.
4. En déduire la période des oscillations.

★★☆ Exercice 6 – Pendule simple incliné



On réalise un pendule simple à l'aide d'un mobile autoporteur sur table à coussin d'air. Le mobile de masse m est accroché à l'extrémité d'un fil de longueur ℓ dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe O de la table. Il peut alors se déplacer sans frottement dans un plan (xOy). La table est inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale.

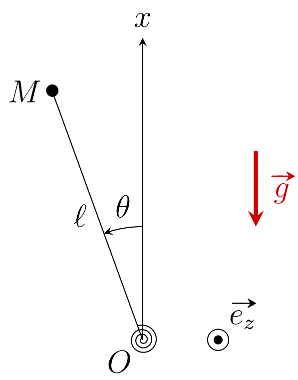
1. Exprimer le moment cinétique de M par rapport à O.
2. Effectuer un bilan des forces et exprimer leur projection sur la base cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$.
3. Établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas des petites oscillations en utilisant un théorème du moment cinétique.
4. En déduire l'expression de la période des petites oscillations.
5. Le pendule est lancé depuis sa position d'équilibre sur l'axe (Ox) avec un vitesse initiale v_0. Exprimer l'angle maximal atteint. On supposera l'hypothèse des petites oscillations toujours valide.

★★☆ Exercice 7 – Gravimètre de Holweck–Lejay

Instrument ancien, le gravimètre de Holweck–Lejay est constitué d'une tige de longueur ℓ et de masse négligeable, libre de tourner autour d'un axe Oz, au bout de laquelle est placée en M une masse m (cf. schéma ci-dessous). En plus du poids, le système est soumis à une force de rappel élastique associée à un ressort spirale. On admet que l'expression du moment de cette force par rapport au point O est de la forme $\vec{\Gamma} = -C\theta\vec{e_z}$ où C est une constante positive.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ. On posera $G = C/(m\ell)$.
2. Déterminer la ou les positions d'équilibre. Commenter les cas où $G/g > 1$ et où $G/g < 1$.
3. On se place dans le cas où il n'existe qu'une position d'équilibre. Déterminer l'expression de la période T des oscillations pour des oscillations de faible amplitude.

Ce gravimètre permet de mesurer avec précision des variations locales du champ de pesanteur. Pour la suite, on prendra $T = 0{,}5\,\mathrm{s}$, $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et $\ell = 3{,}2\,\mathrm{cm}$.



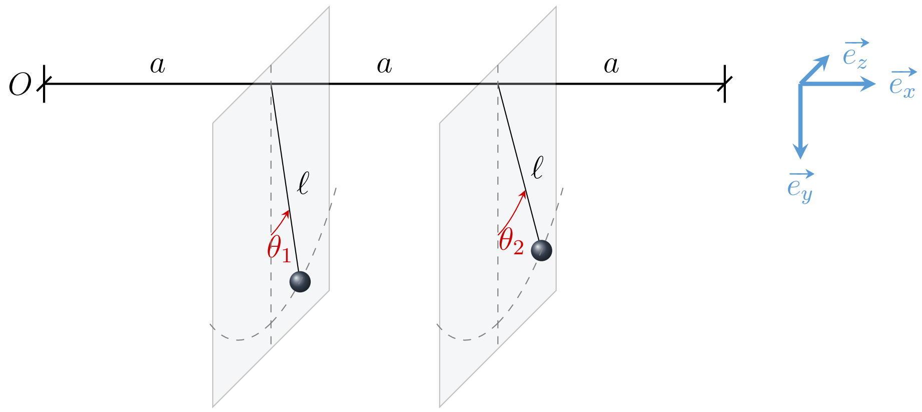
4. Exprimer la variation δT de la période T quand l'accélération de la pesanteur subit une fluctuation faible en passant de g à $g + \delta g$. En déduire la variation δg associée à une variation relative de période $\delta T/T = 10^{-3}$.
5. Pour une même variation relative de la période, comparer la variation $\delta g'$ obtenue avec un pendule simple de même longueur ℓ. Conclure.

★★★ Exercice 8 – Pendules couplés

Le système représenté ci-dessous est constitué d'un fil de torsion inextensible, de longueur $3a$ et de masse négligeable, est fixé rigidement par ses extrémités à un support immobile. Deux pendules identiques sont soudés sur le câble, aux abscisses $x_1 = a$ et $x_2 = 2a$. Chaque pendule est constitué d'une masse m ponctuelle fixée à l'extrémité d'une tige de longueur ℓ et de masse négligeable.

Au repos, $\theta_1 = \theta_2 = 0$ et le fil n'est soumis à aucune torsion. Lorsque les sections délimitant une portion de câble de longueur a tournent d'un angle de torsion relatif $\Delta\theta$, cette portion est alors soumise à un moment, parallèle à l'axe du fil. Sa norme s'exprime par le produit $C|\Delta\theta|$, où C est la constante de raideur de torsion propre à la portion de fil.

Tout phénomène dissipatif sera négligé et on se placera dans le cadre de l'approximation des petits angles.



1. Pour un tel système, en pratique, préciser dans quelle mesure il devient légitime de négliger les phénomènes dissipatifs. On donnera des critères qualitatifs.
2. Établir les équations différentielles couplées régissant la dynamique du système. On fera apparaitre deux pulsations caractéristiques $\omega_g = \sqrt{g/\ell}$ et $\omega_C = \sqrt{C/(m\ell^2)}$ dont on donnera une interprétation physique.

On introduit de nouvelles variables :

$$\begin{cases} \theta_+ = \theta_1 + \theta_2 \\ \theta_- = \theta_1 - \theta_2 \end{cases}$$

3. Établir le système d'équations différentielles qu'elles vérifient.
4. Justifier l'intérêt de ce changement de variable.
5. Décrire le mouvement des deux pendules correspondant à chacun des deux états particuliers $\theta_-(t) = 0$ et $\theta_+(t) = 0$.
6. Exprimer les pulsations correspondantes, appelées pulsations propres et notées ω_s (symétrique) et ω_a (antisymétrique), en fonction de ω_g et ω_C.
7. En considérant la torsion des différentes portions du câble pour les modes symétriques et antisymétriques, retrouver directement l'expression de ω_s et de ω_a.

Coups de pouce

Ex. 2 2. Quelle force permet de réduire la longueur du fil ? Que peut-on dire de son moment en O et qu'en déduire sur le moment cinétique ?
Ex. 3 3. Multiplier l'équation obtenue par $\dot\theta$ pour pouvoir intégrer. Attention aux conditions initiales !
Ex. 4 1. Faire un schéma !
Ex. 5 1. Exprimer l'altitude de la masse en fonction de L et θ, puis faire un DL. 2. De même, exprimer x et $\vec{v}$, faire un DL au premier ordre non nul.

Ex. 6 2. Projeter soigneusement le poids dans la base cartésienne, puis dans la base cylindrique.

Ex. 7 2. Équation transcendante : à résoudre graphiquement (ou avec Python si des solutions numériques sont attendues, ce qui n'est pas le cas ici. Cf. TD M2 Ex. 14). 4. Écrire la période $T + \delta T$ quand g devient $g + \delta g$, puis faire un DL. On peut aussi différencier la relation précédente.

✓ Éléments de correction

Ex. 1 $\ddot\theta + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$.

Ex. 2 1. $\overrightarrow{L_O} = m\ell_0 v_0 \overrightarrow{e_z}$, $L_z = m\ell_0 v_0 = 0{,}1\,\mathrm{J\cdot s}$; 2. $v_1 = \frac{\ell_0}{\ell_1} v_0 = 2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; 3. $\mathcal{E}_{c,1} = 4\mathcal{E}_{c,0}$.

Ex. 3 2. $\ddot\theta - \frac{g}{R}\cos\theta = 0$; 3. $v(\theta) = R\dot\theta = \sqrt{2gR\,(\sin\theta - \sin\theta_0)}$; 4. $v_{\max} = 6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Ex. 4 1. $\overrightarrow{L_O} = mL^2\omega\sin\alpha(\sin\alpha\overrightarrow{e_z} + \cos\alpha\overrightarrow{e_r})$; 2. $L\omega^2\cos\alpha = g$; 3. $|\omega| \geqslant \sqrt{\frac{g}{L}}$; 4. $\alpha \to \frac{\pi}{2}$.

Ex. 5 1. $L(1-\cos\theta) \underset{\text{DL1}}{\approx} 0$; 3. $\ddot\theta + \left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}\right)\theta = 0$; 4. $T_0 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}}}$.

Ex. 6 1. $\overrightarrow{L_O} = m\ell^2\dot\theta\overrightarrow{e_z}$; 2. $\vec{P} = mg(\sin\alpha\cos\theta\overrightarrow{e_r} - \sin\alpha\sin\theta\overrightarrow{e_\theta} - \cos\alpha\overrightarrow{e_z})$, $\overrightarrow{R_N} = R_N\overrightarrow{e_z}$, $\vec{T} = -T\overrightarrow{e_r}$; 3. $\ddot\theta + \frac{g\sin\alpha}{\ell}\theta = 0$; 4. $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g\sin\alpha}}$; 5. $|\theta| \leqslant \frac{v_0}{\ell\omega_0}$.

Ex. 7 1. $\ddot\theta - \frac{g}{\ell}\sin\theta + \frac{G}{\ell}\theta = 0$; 2. $\sin\theta = G\theta/g$; 3. $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{G-g}}$; 4. $\delta g = \frac{8\pi^2\ell}{T^2}\frac{\delta T}{T} = 0{,}01\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$; 5. $\delta g' = -2g\frac{\delta T'}{T'} = -0{,}02\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Ex. 8 2. $\ddot\theta_1 + (\omega_g^2 + 2\omega_C^2)\theta_1 = \omega_C^2\theta_2$, $\ddot\theta_2 + (\omega_g^2 + 2\omega_C^2)\theta_2 = \omega_C^2\theta_1$; 3. $0 = \ddot\theta_+ + (\omega_g^2 + \omega_C^2)\theta_+$, $0 = \ddot\theta_- + (\omega_g^2 + 3\omega_C^2)\theta_-$; 6. $\omega_s = \sqrt{\omega_g^2 + \omega_C^2}$, $\omega_a = \sqrt{\omega_g^2 + 3\omega_C^2}$.