Chapitre M7 – Mouvement d'un solide

Plan du cours

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

→ Différencier un solide d'un système déformable.
→ Reconnaître et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire.
→ Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.
→ Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni.
→ Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
→ Définir un couple.
→ Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
→ Exploiter le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.
→ Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.
→ Établir, dans le cas d'un solide en rotation dans autour d'un axe fixe, l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.

Questions de cours

→ Énoncer le théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe pour un solide en rotation.
→ Énoncer le théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe et montrer qu'il est équivalent à la loi du moment cinétique scalaire.
→ Établir l'équation du mouvement du pendule pesant par application du théorème du moment cinétique et/ou avec le théorème de l'énergie cinétique.

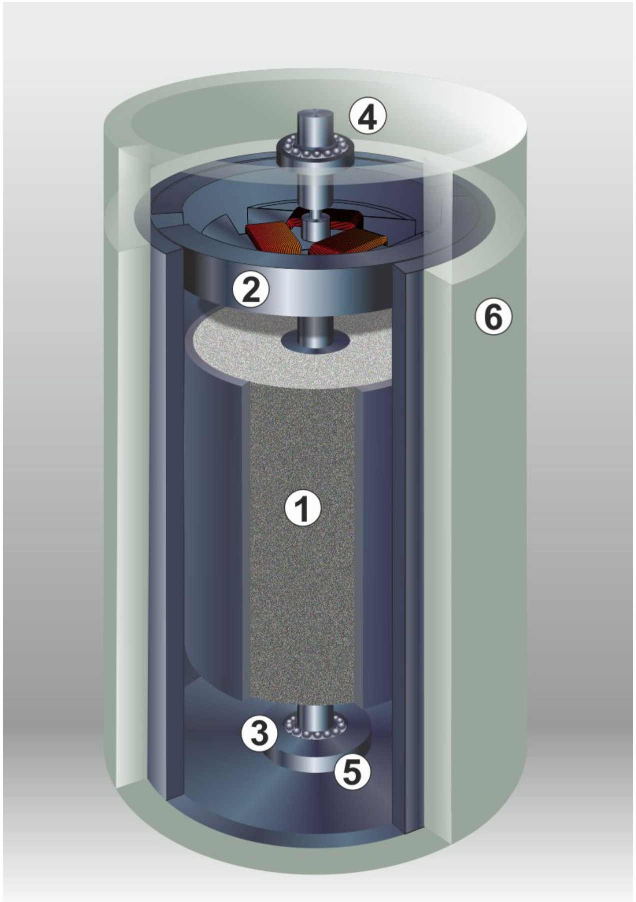
Documents

Document 1 – Moment d'inertie de la Terre

En analysant finement le mouvement de rotation de la Terre, il est possible de déterminer son moment d'inertie autour de l'axe Nord-Sud. Des mesures astronomiques montrent qu'il vaut $0{,}33 M_T R_T^2$, où M_T et R_T sont les masse et rayon de la Terre. On note alors qu'il est inférieur au moment d'inertie d'une boule homogène de même masse et de même rayon, qui vaut $0{,}4 M_T R_T^2$.

On en déduit que la répartition des masses à l'intérieur de la Terre n'est pas homogène et que la couche profonde située près de son axe de rotation est plus dense que les couches superficielles. Cette couche profonde est le noyau. Des mesures sismiques permettent par ailleurs de déterminer sa taille. On peut donc estimer sa densité, qui correspond à celle du fer à haute pression. C'est un des principaux arguments prouvant que le noyau est essentiellement composé de fer.

Document 2 – Volant d'inertie



L'énergie solaire est abondante mais son stockage présente d'importantes difficultés. Une solution consiste à utiliser des volants d'inertie, qui permettent de stocker de l'énergie pendant la journée, puis de la restituer pendant la nuit. Une entreprise française propose un volant en béton, matériau peu coûteux (voir la conférence TEDx d'André Gennesseaux, co-fondateur d'Énergiestro).

Le volant ENERGIESTRO est constitué d'un cylindre (1) en béton précontraint par un enroulement de fibre de verre. Il est capable de résister à une grande vitesse de rotation pour stocker l'énergie sous forme cinétique. Un moteur/alternateur (2) permet de transférer de l'énergie électrique au volant (accélération) puis de la récupérer (freinage). Les paliers inférieur (3) et supérieur (4) sont des roulements à billes. Une butée magnétique passive (5) supporte le poids du volant. Une enceinte étanche (6) maintient le volant dans le vide pour supprimer le frottement de l'air.

energiestro.fr

Pour une version DIY : https://youtu.be/yhu3s1ut3wM.

Document 3 – Analogies entre translation et rotation

Translation rectiligne	**Rotation autour d'un axe fixe**
(Oz) direction du mouvement	
Position z Vitesse $\dot{z}$	
Masse m Quantité de mouvement $p_z = m\dot{z}$ Forces $\overrightarrow{F_{i,z}}$	
PFD $\dfrac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = \sum F_{i,z}$	
Puissance d'une force $\mathcal{P}(F_{i,z}) = F_{i,z}\dot{z}$ Énergie cinétique $\mathcal{E}_\mathrm{c} = \dfrac{1}{2}m\dot{z}^2$	
TEC $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}(F_{i,z})$ équivalent au PFD	

1 Cinématique du solide

1.1 Description d'un solide

Définition

Un **solide indéformable** est un système $\mathcal{S}$ dont les points restent à distance constante les uns des autres. Dans le référentiel $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ lié au solide, tous les points du solide sont **immobiles**.
En particulier, on ne tient pas compte des déformations ni des ruptures.

Exemple : *Une bille de billard, une barre d'acier, etc. sont en général bien décrit par ce modèle. En revanche, un ressort, une éponge, etc. sont plutôt considérés comme des systèmes déformables.*

Cinématique

On note :

- $\mathcal{R} = (O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ le référentiel d'étude (galiléen) ;
- $\mathcal{R}_{\mathcal{S}} = (O', \vec{e_x}', \vec{e_y}', \vec{e_z}')$ le référentiel lié au solide.

Pour repérer un solide dans $\mathcal{R}$, il faut **six paramètres** :

- les trois coordonnées d'un point du solide : par exemple celles de O' ;
- les trois angles qui définissent l'orientation des axes $\vec{e_x}'$, $\vec{e_y}'$ et $\vec{e_z}'$ par rapport au repère associé au référentiel $\mathcal{R}$.

On distinguera deux types de mouvements : la **translation** et la **rotation**.

Application 1 – Mouvements de translation et de rotation

Pour chacune des situations ci-dessous, indiquer la nature du mouvement.

	Référentiel	**Système**
1.	terrestre	ascenseur
2.	terrestre	tambour de machine à laver
3.	terrestre	nacelle de grande roue
4.	géocentrique	Terre
5.	héliocentrique	Terre

1.2 Translation

Définition

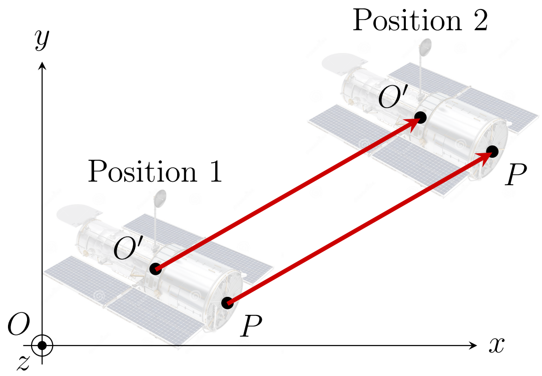
Un solide est en **translation** lorsque les vecteurs $\vec{e_x}'$, $\vec{e_y}'$ et $\vec{e_z}'$ sont fixes dans $\mathcal{R}$.

Dans ce cas l'orientation du solide est fixe : **tous les points d'un solide en translation ont le même mouvement**. L'étude du mouvement peut se ramener à l'étude du mouvement d'un de ces points, par exemple O' ou son centre d'inertie. En effet, on a

$$\forall P \in \mathcal{S} \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{\text{cste}},$$

d'où

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OP} = \mathrm{d}\overrightarrow{OO'}, \quad \vec{v}_{P/\mathcal{R}} = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \vec{a}_{P/\mathcal{R}} = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}}.$$



On distingue deux mouvements de translation particuliers :

- **translation rectiligne** : le mouvement de O' est un mouvement de translation rectiligne. Les trajectoires de tous les points du solide sont sur des droites de même direction mais d'origines différentes ;
- **translation circulaire** : le mouvement de O' est circulaire. Les trajectoires de tous les points de $\mathcal{S}$ sont des cercles de même rayon mais de centres différents.

1.3 Rotation

Définition

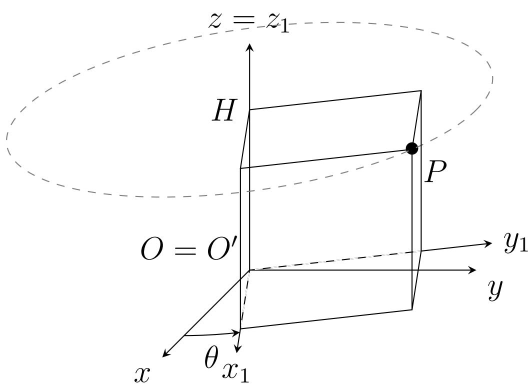
Un solide est en **rotation** autour d'un axe fixe Δ dans $\mathcal{R}$ s'il existe un unique axe Δ immobile dans $\mathcal{R}$ **et** dans $\mathcal{R}_\mathcal{S}$.

Soit un point P du solide et H son projeté orthogonal sur l'axe Δ. Le point P décrit un cercle de rayon $R = HP$ de centre H. On adopte les coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HP} = z\overrightarrow{e_z} + R\overrightarrow{e_r} \quad \text{avec} \quad z = \text{cste},$$

d'où

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OP} = R\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} \qquad \vec{v}_{P/\mathcal{R}} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = R\omega\overrightarrow{e_\theta}.$$



Propriété

La **vitesse angulaire** $\omega = \dot{\theta}$ est commune à tous les points du solide. La **vitesse** d'un point situé à une distance R de l'axe de rotation est donnée par

$$\vec{v}_{P/\mathcal{R}} = R\omega\overrightarrow{e_\theta}.$$

Les points du solide suivent une trajectoire circulaire dont le rayon dépend de leur distance à l'axe de rotation.

Rq : L'axe de rotation n'est pas forcément situé à l'intérieur du solide :

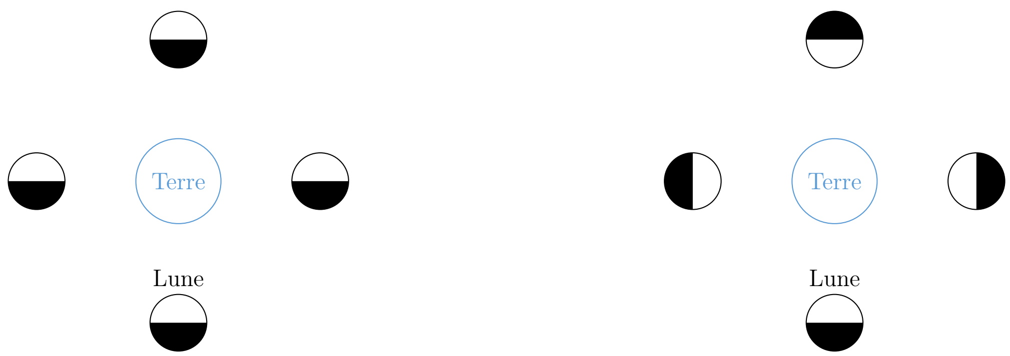
- balancier d'une horloge : l'axe passant par le point d'attache traverse le balancier ;
- voiture dans un virage : l'axe de rotation est l'axe vertical qui passe par le centre de la trajectoire.

Application 2 – Face cachée de la Lune

Dans le référentiel géocentrique, la Lune effectue une révolution circulaire de période $T = 27{,}3\,\mathrm{j}$ centrée sur la Terre. La distance Terre-Lune vaut $R = 3{,}84 \times 10^5\,\mathrm{km}$. Au cours de cette révolution, la Lune montre toujours la même face à la Terre.

1. Décrire le mouvement de la Lune dans le référentiel géocentrique.
2. Déterminer la vitesse angulaire Ω du centre de la Lune sur sa trajectoire.
3. Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du centre de la Lune dans le référentiel géocentrique. Calculer numériquement la norme de la vitesse.
4. Décrire le mouvement de la Lune dans le repère sélénocentrique (mêmes axes que le repère géocentrique mais origine au centre de la Lune).

Il ne faut pas confondre un mouvement de **rotation** avec une **translation circulaire**.



Translation circulaire
Pas de face cachée

Rotation
Existence d'une face cachée

2 Moment cinétique

2.1 Moment d'inertie

On considère un ensemble $\{M_i\}$ de points matériels de masses m_i en rotation autour d'un axe fixe (Oz). Le moment cinétique L_z de l'ensemble $\{M_i\}$ est la somme des moments cinétiques de chacun des points M_i :

$$L_z = \sum_i L_z(M_i) = \sum_i \left(\overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\vec{v_i}\right) \cdot \vec{e_z} = \sum_i m_i r_i^2 \omega_i,$$

où r_i est la distance entre M_i et l'axe (Oz), et ω_i la vitesse angulaire du point M_i.

Pour un solide indéformable en rotation, la vitesse angulaire est la même pour tous les points du solide. Le moment cinétique du solide en rotation à la vitesse angulaire ω s'exprime alors :

$$L_z = \sum_i m_i r_i^2 \omega = J_z \omega \quad \text{avec} \quad J_z = \sum_i m_i r_i^2.$$

Rq : Pour un solide continu, il suffit de remplacer la somme par une intégrale :

$$J_z = \int_{\mathcal{V}} r^2 \mathrm{d}m.$$

On intègre alors sur l'ensemble du volume du solide.

Définition

Le **moment cinétique** d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (Oz) à la vitesse angulaire ω s'exprime

$$L_z = J_z \omega,$$

où J_z est le **moment d'inertie** du solide par rapport à l'axe (Oz), exprimé en $\mathrm{kg \cdot m^2}$.

Rq : Le moment cinétique est toujours une grandeur algébrique, de même signe que ω. ω est positif si la rotation s'effectue dans le sens direct défini par l'orientation de l'axe (Oz).

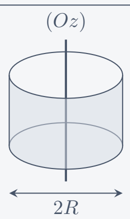
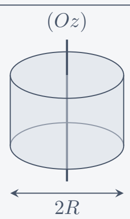
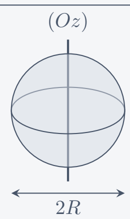
La contribution d'un élément de surface δm au moment d'inertie est d'autant plus importante que sa distance à l'axe est importante : plus les masses sont réparties loin de l'axe de rotation, plus le moment d'inertie sera important. Par exemple (Doc. 1) :

- une boule (pleine) de masse m et de rayon R a un moment d'inertie $\frac{2}{5}mR^2$;
- une sphère (vide) de même masse et rayon a un moment d'inertie $\frac{2}{3}mR^2$.

Application 3 – Plongeon

On admet qu'en chute libre, le moment cinétique d'un système est conservé. À l'aide d'une estimation raisonnable des paramètres pertinents, interpréter l'évolution de la vitesse angulaire de rotation du plongeur lors son saut : https://youtu.be/m9BzPki0V7w?t=42.

Le tableau ci-dessous indique les moments d'inertie de quelques solides de masse m.

Cylindre vide de rayon R	Cylindre plein de rayon R	Boule de rayon R	Tige de longueur L
			
mR^2	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{1}{12}mL^2$

Tabouret d'inertie

2.2 Couple

Expérience : Ouverture du bouchon d'une bouteille

Comment faire tourner le bouchon d'une bouteille, sans pousser la bouteille ?

Définition

On appelle **couple** un ensemble de forces $\{\vec{F_i}\}$ dont la résultante $\vec{F}$ est nulle mais dont le moment résultant Γ par rapport à l'axe (Oz) est non nul :

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F_i} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Gamma = \sum_i \mathcal{M}_z(\vec{F_i}) \neq 0.$$

Pour un solide en rotation autour de (Oz) à la vitesse angulaire ω, on dit que le couple est :

- **moteur** si ω et Γ sont de même signe, c'est-à-dire qu'il tend à faire tourner le solide autour de (Oz) dans le **même sens** que le solide ;
- **résistant** si ω et Γ sont de signes opposés, c'est-à-dire qu'il tend à faire tourner le solide dans le **sens opposé**.

Liaison pivot

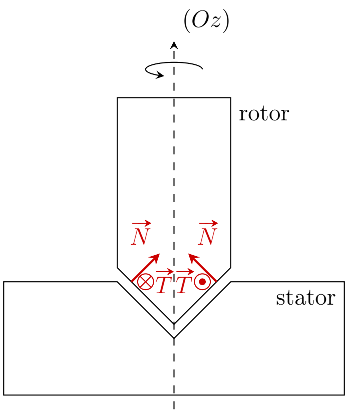
Dans une machine tournante (moteur, alternateur, roue, Doc 2, etc.), on distingue :

- la partie fixe, appelée **stator** ;
- la partie mobile, appelée **rotor**.

Définition

Une **liaison pivot** d'axe (Oz) restreint les possibilités de mouvement du rotor à une rotation d'axe (Oz) par rapport au stator.

Exemple : *Un vélo contient de nombreuses liaisons pivot.*



Le moment de la réaction normale $\vec{N}$ est toujours nul, car la droite d'action de $\vec{N}$ passe par l'axe, mais ce n'est a priori pas le cas de la réaction tangentielle $\vec{T}$.

Définition

Le moment des actions de contact d'une **liaison pivot idéale** d'axe (Oz) est nul par rapport à cet axe.

Dans le cas où la liaison n'est pas idéale, on peut modéliser :

- des **frottements fluides** par un couple résistant de moment $-\lambda\omega$;
- des **frottements solides** par un couple résistant de moment constant et de signe opposé à ω.

2.3 Théorème du moment cinétique

TMC

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ **galiléen**, la dérivée temporelle du moment cinétique d'un solide par rapport à son axe de rotation (Oz) fixe est égale à la somme des moments des **forces extérieures** par rapport à cet axe :

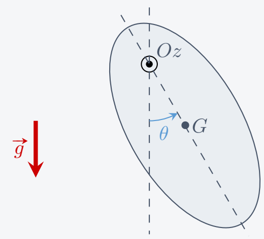
$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{M}(\overrightarrow{F_i}) \quad \text{soit} \quad J_z\dot{\omega} = \sum_i \mathcal{M}(\overrightarrow{F_i}).$$

Les moments des forces intérieures se compensent deux à deux. Pour deux points M_i et M_j du solide :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F_{j/i}}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F_{i/j}}) = \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{F_{j/i}} + \overrightarrow{OM_j} \wedge \overrightarrow{F_{i/j}} = \left(\overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OM_j}\right) \wedge \overrightarrow{F_{j/i}} = \vec{0}.$$

Application 4 – Pendule pesant

On considère un pendule de masse totale m et de centre d'inertie G, en rotation autour de l'axe fixe (Oz) horizontal. On note J son moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz) et d la distance OG. On considère que la liaison pivot d'axe (Oz) est idéale.
La position du pendule est repérée par l'angle θ entre (OG) et la verticale.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ. On dressera soigneusement le bilan des forces.
2. En déduire la pulsation et la période du mouvement dans le cas de faibles oscillations. Comparer le cas d'une masse ponctuelle située en G ($J_1 = md^2$) et celui d'une tige de longueur $2d$ accrochée à l'une de ses extrémités en O ($J_2 = 4md^2/3$).
3. Dans le cas général, c'est-à-dire en dehors de la limite des oscillations de faible amplitude, montrer qu'à tout instant

$$\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mgd\cos\theta = \text{cste}.$$

Interpréter.

3 Approche énergétique

3.1 Énergie cinétique

On modélise le solide par un ensemble $\{M_i\}$ de points matériels de masses m_i en rotation autour d'un axe fixe (Oz) à la vitesse angulaire ω. L'énergie cinétique $\mathcal{E}_\mathrm{c}$ du solide est la somme des énergies cinétiques de chacun des points M_i :

$$\mathcal{E}_\mathrm{c} = \sum_i \mathcal{E}_\mathrm{c}(M_i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2.$$

Propriété

L'**énergie cinétique** $\mathcal{E}_\mathrm{c}$ d'un solide en rotation autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire ω est

$$\mathcal{E}_\mathrm{c} = \frac{1}{2} J_z \omega^2,$$

où J_z est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Oz).

Rq : Cette expression ne tient compte que du mouvement de rotation car on ne considère que le cas où l'axe est fixe. Sinon il faudrait tenir compte de l'énergie cinétique associée au mouvement de translation.

3.2 Puissance d'une force

Soit $\vec{F}$ une force qui s'exerce en un point $M(r,\theta,z)$ d'un solide $\mathcal{S}$ en rotation autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire ω. La puissance de cette force s'écrit :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v},$$

où $\vec{v}$ est la vitesse du point M. En coordonnées cylindriques, on a

$$\vec{F} = F_r \vec{e_r} + F_\theta \vec{e_\theta} + F_z \vec{e_z} \quad \text{et} \quad \vec{v} = r\omega \vec{e_\theta},$$

d'où

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = r F_\theta \omega = \mathcal{M}_z(\vec{F})\omega.$$

En effet, les composantes selon $\vec{e_r}$ et $\vec{e_z}$ de $\vec{F}$, ainsi que l'axe (Oz) appartiennent à un même plan, leur moment par rapport à l'axe est donc nul.

Propriété

La **puissance** d'une force $\vec{F}$ qui s'applique en un point M d'un solide en rotation autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire ω est donnée par :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \Gamma\omega \quad \text{avec} \qquad \Gamma = \mathcal{M}_z(\vec{F}).$$

On retrouve les constats habituels :

- si $\mathcal{M}_z(\vec{F})$ et ω sont de même signe, $\vec{F}$ tend à faire tourner le solide dans le sens du mouvement, le couple est moteur ;
- sinon, le couple est résistant.

3.3 Théorème de l'énergie cinétique

TEC

Dans un **référentiel galiléen** et pour un solide indéformable en rotation, le **théorème de l'énergie cinétique** s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}_i,$$

où les $\mathcal{P}_i$ sont les puissances des **forces extérieures**.

Application 5 – Équivalence entre le TEC et le TMCS

On considère un solide en rotation autour de l'axe fixe (Oz) à la vitesse angulaire ω. On note J son moment d'inertie par rapport à l'axe. Le système est soumis à des forces $\overrightarrow{F_i}$, dont le moment par rapport à l'axe (Oz) est noté Γ_i.

1. Montrer que le théorème de l'énergie cinétique et le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) sont équivalents.
2. Retrouver l'équation différentielle du pendule pesant (App. 4) en utilisant le TEC.

Propriété

Pour un solide en rotation dont le mouvement est étudié dans un référentiel galiléen, **le TMCS est équivalent au TEC** : ils donnent la même équation.

Application 6 – Volant d'inertie

Un volant d'inertie est un cylindre mis en rotation de manière à stocker de l'énergie. Le volant de stockage solaire (VOSS, Doc. 2) existera en différentes tailles, adaptées à différentes utilisations. Les caractéristiques des volants des différents modèles de la gamme sont indiquées ci-dessous.

Capacité $(\mathrm{kW \cdot h})$	**Diamètre** (m)	**Hauteur** (m)	**Masse** (t)	**Puissance** (kW)
10	1,3	2,5	6,0	2 à 40
20	1,6	3,1	12	4 à 80
50	2,2	4,3	30	10 à 200

Données : le moment d'inertie d'un cylindre plein de masse m et de rayon R vaut $mR^2/2$.

1. Pour chacun des modèles, déterminer la vitesse angulaire Ω du volant en tours par minute et la vitesse d'un élément en périphérie du volant. Commenter.
2. Justifier que ce système ne permet de stocker efficacement de l'énergie que sur des temps relativement courts.

On considère le modèle de $50\,\mathrm{kW \cdot h}$.

3. Le volant est initialement à l'arrêt et on néglige tous les frottements. Déterminer le temps nécessaire pour « recharger » le système en utilisant la puissance maximale indiquée.
4. Donner l'expression de la vitesse angulaire $\omega(t)$ lors de la charge.

Une fois la vitesse angulaire Ω, atteinte le système n'est plus alimenté. On modélise les frottements par des frottements fluides, associés à un couple résistant $\Gamma = -\alpha\omega$, où ω est la vitesse angulaire du volant et α une constante positive.

5. Exprimer la vitesse angulaire $\omega(t)$ lors de cette phase.

6. Représenter graphiquement l'évolution de $\omega(t)$, puis celle de l'énergie stockée.
7. Une alternative au stockage par volant d'inertie consiste à surélever une masse, qui entraine ensuite un alternateur lors de sa descente. Quelle serait la hauteur h nécessaire pour stocker la même énergie qu'un volant VOSS, en utilisant ce même volant comme masse ?
8. Déterminer le volume d'eau minimal nécessaire pour obtenir la même énergie avec le barrage hydroélectrique du Chevril, plus haut barrage français avec une hauteur de 180 m.