

TD M5 – Moment cinétique

Correction

Exercice 1 – Le pendule simple

Cf. cours.

Exercice 2 – Sphère attachée à un fil

1. Par définition

$$\boxed{\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge (m\vec{v}_0) = m\ell_0 v_0 \vec{e}_z} \quad \text{et} \quad \boxed{L_z = \vec{L}_O \cdot \vec{e}_z = m\ell_0 v_0.}$$

A.N. : $L_z = 0,1 \text{ J} \cdot \text{s}$.

2. On étudie le mouvement de la {sphère} dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Le moment du poids et de la réaction du support par rapport à (Oz) sont nuls car ces forces sont colinéaires à (Oz) . La tension du fil est toujours une force centrale, son moment par rapport à (Oz) est nul. Par application du TMCS, le moment cinétique L_z est conservé, d'où

$$\boxed{v_1 = \frac{\ell_0}{\ell_1} v_0.}$$

A.N. $v_1 = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

3. La vitesse est multipliée par deux, donc l'énergie cinétique est multipliée par quatre, soit

$$\boxed{\mathcal{E}_{c,1} = 4\mathcal{E}_{c,0}.}$$

4. Il y a un mouvement radial lors de la réduction de longueur du fil, la tension du fil n'est alors plus orthogonale à la trajectoire : elle travaille. Le mouvement radial est dans le sens de la tension, son travail est donc positif, ce qui explique la variation d'énergie cinétique.

Exercice 3 – Vitesse à la sortie d'un toboggan

1. Les forces qui s'exercent sur le système sont le poids et la réaction normale du support (pas de réaction tangentielle car les frottements sont négligés). Cf. schéma ci-dessous.

2. On étudie le mouvement de l'{enfant assimilé au point G } dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à :

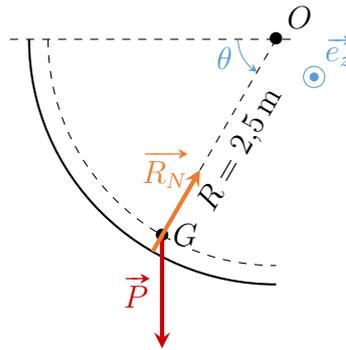
- son poids, de moment scalaire

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}) = Lmg \cos \theta ;$$

- la réaction normale de moment nul par rapport à (Oz) car c'est une force centrale.

On applique le TMCS par rapport à l'axe (Oz) , et on obtient :

$$\boxed{\ddot{\theta} - \frac{g}{R} \cos \theta = 0.}$$



3. Cette équation s'intègre en la multipliant par $\dot{\theta}$. En utilisant les conditions initiales à $t = 0$ ($\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$), on trouve

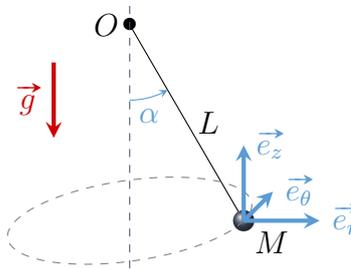
$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{R}\sin\theta = -\frac{g}{R}\sin\theta_0, \quad \text{d'où} \quad \boxed{v(\theta) = R\dot{\theta} = \sqrt{2gR(\sin\theta - \sin\theta_0)}}.$$

On a retenu la solution positive lors du passage à la racine car le mouvement se fait dans le sens direct autour de (Oz) .

4. La vitesse maximale est atteinte en $\theta = 90^\circ$, on obtient $v_{\max} = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 22 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Exercice 4 – Pendule conique

1. Le schéma du dispositif est le suivant.



On a

$$\overrightarrow{OM} = L(\sin\alpha\vec{e}_r - \cos\alpha\vec{e}_z) \quad \text{et} \quad \vec{v} = v\vec{e}_\theta.$$

La trajectoire du point M circulaire uniforme de rayon $L \sin \alpha$, parcourue à vitesse angulaire ω constante, d'où $v = L\omega \sin \alpha$.

Par définition

$$\boxed{\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge (m\vec{v}) = mL^2\omega \sin\alpha(\sin\alpha\vec{e}_z + \cos\alpha\vec{e}_r)}.$$

2. On s'intéresse au mouvement de la masse M dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Le système est soumis à

- son poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = Lmg \sin\alpha\vec{e}_\theta ;$$

- la tension du fil, qui est une force centrale, donc de moment nul en O .

En appliquant le TMC en O , on obtient

$$mL^2\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \vec{e}_\theta = Lmg \sin \alpha \vec{e}_\theta, \quad \text{d'où} \quad \boxed{L\omega^2 \cos \alpha = g}$$

si $\alpha \neq 0$.

3. On a

$$\cos \alpha = \frac{g}{L\omega^2}.$$

Cette équation admet une solution α si

$$\boxed{|\omega| \geq \sqrt{\frac{g}{L}}.}$$

4. Si $\omega \rightarrow \infty$, alors $\cos \alpha \rightarrow 0$, soit

$$\boxed{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}.}$$

Ce résultat est cohérent avec l'intuition que l'on peut avoir du problème. Plus le point M tourne rapidement, plus le pendule se rapproche de l'horizontale.

Exercice 5 – Pendule simple couplé à des ressorts

1. Le déplacement vertical est donné par $L(1 - \cos \theta)$. Au voisinage de O , c'est-à-dire pour $\theta \ll 1$, $\cos \theta \underset{\text{DL2}}{\approx} 1 - \theta^2/2$, donc au premier ordre en θ , on a

$$L(1 - \cos \theta) \underset{\text{DL1}}{\approx} 0.$$

On peut négliger le déplacement vertical pour $\theta \ll 1$ et considérer que le mouvement est horizontal.

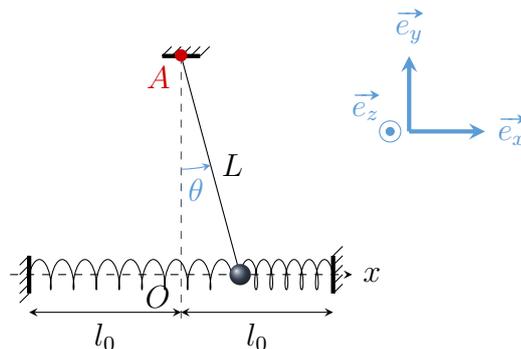
2. On a

$$x = L \sin \theta \quad \text{et} \quad \vec{v} = L\dot{\theta}\vec{e}_\theta = L\dot{\theta}(\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_y),$$

d'où, avec un DL au premier ordre non nul,

$$\boxed{x \underset{\text{DL1}}{\approx} L\theta} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{v} \underset{\text{DL0}}{\approx} L\dot{\theta}\vec{e}_x.}$$

3. On applique le TMC par rapport au centre du mouvement : ici, il s'agit de A .



On étudie le mouvement de la {masse m } dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La masse est soumise à :

- son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = -Lmg \sin \theta \vec{e}_z \approx -Lmg\theta \vec{e}_z ;$$

- la force de rappel du ressort gauche : $\vec{F}_g = -kx\vec{e}_x$

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_g) \approx -kL^2\theta \vec{e}_z ;$$

- la force de rappel du ressort droit : $\vec{F}_d = -kx\vec{e}_x$

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_d) \approx -kL^2\theta \vec{e}_z.$$

En projetant le TMC selon \vec{e}_z , on obtient :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{m} \right) \theta = 0.$$

4. On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de période propre

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}}}.$$

Exercice 6 – Pendule simple incliné

1. Dans la base cylindrique, on a

$$\vec{L}_O = m\ell^2\dot{\theta}\vec{e}_z.$$

2. Le mobile est soumis à :

- son poids :

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_z) = mg(\sin \alpha \cos \theta \vec{e}_r - \sin \alpha \sin \theta \vec{e}_\theta - \cos \alpha \vec{e}_z) ;$$

- la réaction normale du support : $\vec{R}_N = R_N \vec{e}_z$;
- la tension du fil : $\vec{T} = -T \vec{e}_r$.

3. On commence par exprimer le moment de chacune de ces forces par rapport au point O :

- $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \ell mg(-\sin \alpha \sin \theta \vec{e}_z + \cos \alpha \vec{e}_\theta)$;
- $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R}_N) = -\ell R_N \vec{e}_\theta$;
- $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{0}$.

En projetant le TMC sur \vec{e}_z , on obtient :

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -\ell mg \sin \alpha \sin \theta \quad \text{d'où, pour } \theta \ll 1, \quad \ddot{\theta} + \frac{g \sin \alpha}{\ell} \theta = 0.$$

Tout se passe comme dans si le pendule simple était plongé dans un champ de pesanteur d'intensité $g' = g \sin \alpha$. On vérifie notamment que lorsque le plan incliné est vertical, c'est-à-dire $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la pulsation est celle du pendule simple. Si le plan incliné est horizontal, la pulsation propre est nulle : il n'y a pas d'oscillations.

4. Dans le cadre des petites oscillations, la période est celle de l'oscillateur harmonique, soit

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g \sin \alpha}}.$$

5. On résout l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique avec comme conditions initiales $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = v_0/l$, ce qui donne :

$$\theta(t) = \frac{v_0}{\ell \omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{\ell}}.$$

Le pendule effectue des oscillations entre $\pm \frac{v_0}{\ell \omega_0}$.

Exercice 7 – Gravimètre de Holweck–Lejay

1. On applique le TMC en O au {point matériel M de masse m } dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à

- son poids de moment en O

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \ell m g \sin \theta \vec{e}_z;$$

- la force de rappel du ressort spiral :

$$\vec{\Gamma} = -C\theta \vec{e}_z.$$

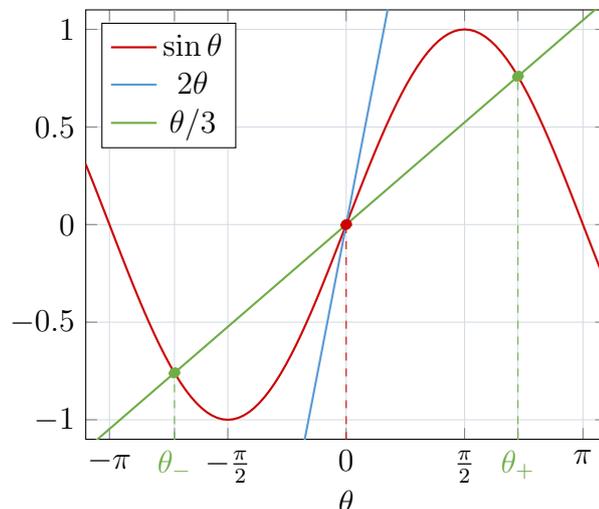
En projetant selon \vec{e}_z , on obtient :

$$m\ell^2 \ddot{\theta} = \ell m g \sin \theta - C\theta \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} - \frac{g}{\ell} \sin \theta + \frac{G}{\ell} \theta = 0, \quad \text{avec} \quad G = \frac{C}{m\ell}.$$

2. Les positions d'équilibre ($\ddot{\theta} = 0$) vérifient $\sin \theta = G\theta/g$. Cette équation admet

- une unique solution $\theta_0 = 0$ si $G/g \geq 1$, c'est-à-dire si le ressort est suffisamment rigide. Il s'agit alors d'une position d'équilibre stable ;
- trois solutions sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$: $\theta_0 = 0$ (instable) et θ_{\pm} (stables) obtenues par résolution numérique ou graphique sinon, c'est-à-dire si le ressort est suffisamment mou.

Le graphe ci-dessous rend compte de ces différentes situations.



3. On se restreint au cas où $G/g > 1$, c'est-à-dire au cas où la constante de raideur du ressort est élevée. Dans l'approximation des petits angles, l'équation du mouvement devient

$$\ddot{\theta} + \frac{G-g}{\ell} \theta = 0.$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\sqrt{\frac{G-g}{\ell}}$. La période des oscillations est donc

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{G-g}}. \quad (1)$$

4. Quand l'accélération de la pesanteur passe de g à $g + \delta g$, la période T des oscillations devient $T + \delta T$:

$$T + \delta T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{G-(g+\delta g)}} = T \sqrt{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \quad \text{où } \varepsilon = \frac{\delta g}{G-g}.$$

Puisque $\varepsilon \ll 1$, on obtient avec un DL à l'ordre un :

$$T + \delta T \approx T \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

On a finalement

$$\delta g = 2(G-g) \frac{\delta T}{T} = \frac{8\pi^2 \ell}{T^2} \frac{\delta T}{T}. \quad (2)$$

A.N. : $\delta g = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Rq : la relation entre δT et δg peut être obtenue directement en différenciant l'expression de la période $T(g)$ (Éq. (1)) :

$$dT = \pi \sqrt{\frac{\ell}{(G-g)^3}} dg,$$

ce qui, en passant à une variation finie $dg \rightarrow \delta g$, aboutit au même résultat (Éq. (2)).

5. La période du pendule simple est donnée par

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

d'où, en différenciant,

$$dT' = -\pi \sqrt{\frac{\ell}{g^3}} dg \quad \text{soit} \quad \frac{dT'}{T'} = -\frac{dg}{2g}.$$

Finalement,

$$\delta g' = -2g \frac{\delta T'}{T'}.$$

A.N. : $\delta g' = -0,02 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pour une même variation relative de période que précédemment, soit le double en valeur absolue de la valeur obtenue avec le gravimètre de Holweck–Lejay. Le gravimètre est donc deux fois plus sensible que le pendule simple pour des mesures de variations de l'accélération de pesanteur.

Exercice 8 – Pendules couplés

1. On peut négliger les phénomènes dissipatifs si l'amplitude des oscillations reste à peu près constante (atténuation inférieure à quelques %) durant la durée de l'expérience.
2. On étudie le mouvement de la masse 1 dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Elle est soumise à

- son poids $\vec{P} = mg\vec{e}_y$, dont le moment par rapport à l'axe (Ox) s'obtient avec le bras de levier :

$$\mathcal{M}_x(\vec{P}) = -\ell mg \sin \theta_1 ;$$

- la tension du fil de longueur ℓ de moment nul par rapport à (Ox) ;
- la force de rappel de la portion du fil à gauche du pendule, de moment par rapport à (Ox)

$$\Gamma_g = -C\theta_1 ;$$

- la force de rappel de la portion du fil à droite du pendule, de moment par rapport à (Ox)

$$\Gamma_g = C(\theta_2 - \theta_1).$$

On applique le TMCS par rapport à l'axe (Ox) :

$$m\ell^2\ddot{\theta}_1 = -C\theta_1 + C(\theta_2 - \theta_1) - mg\ell\theta_1.$$

De même, pour la deuxième masse :

$$m\ell^2\ddot{\theta}_2 = -C\theta_2 - C(\theta_2 - \theta_1) - mg\ell\theta_2.$$

En introduisant les pulsations $\omega_g = \sqrt{g/\ell}$ et $\omega_C = \sqrt{C/(m\ell^2)}$, on obtient un système d'équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + (\omega_g^2 + 2\omega_C^2)\theta_1 = \omega_C^2\theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 + (\omega_g^2 + 2\omega_C^2)\theta_2 = \omega_C^2\theta_1 \end{cases}$$

ω_g est la pulsation qu'aurait le pendule s'il n'était soumis qu'au poids.

ω_C est la pulsation qu'aurait le pendule s'il n'était soumis qu'au couple de rappel des différentes portions de fil : c'est la pulsation d'un **pendule de torsion**.

3. En sommant, puis en soustrayant les deux équations précédentes, on obtient le système :

$$\begin{cases} 0 = \ddot{\theta}_+ + (\omega_g^2 + \omega_C^2)\theta_+ \\ 0 = \ddot{\theta}_- + (\omega_g^2 + 3\omega_C^2)\theta_- \end{cases}$$

4. Avec ces deux variables, on obtient un système d'équations différentielles découplées que l'on pourra résoudre analytiquement.

5. Si $\theta_- = 0$, alors $\theta_1 = \theta_2$: les deux pendules oscillent en phase. C'est le **mode symétrique**.
Si $\theta_+ = 0$, alors $\theta_1 = -\theta_2$: les deux pendules oscillent en opposition de phase. C'est le **mode antisymétrique**.
6. Il s'agit d'équations d'OH, dont on identifie la pulsation propre, d'où

$$\boxed{\omega_s = \sqrt{\omega_g^2 + \omega_C^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_a = \sqrt{\omega_g^2 + 3\omega_C^2}}.$$

7. Pour le mode symétrique, la portion de fil située entre les deux pendules n'est soumise à aucune torsion car $\theta_1 = \theta_2$. On reprend les équations obtenues à la question 2

$$m\ell^2\ddot{\theta}_1 = -C\theta_1 - mgl\theta_1 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{\theta}_1 + \omega_s^2\theta_1 = 0}.$$

Pour le mode antisymétrique, $\theta_1 = -\theta_2$. Le TMCS appliqué au premier pendule donne cette fois :

$$m\ell^2\ddot{\theta}_1 = -C\theta_1 - 2C\theta_1 - mgl\theta_1 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{\theta}_1 + \omega_a^2\theta_1 = 0}.$$