TD T3 – Deuxième principe

Pour tous les exercices, où l'indice « ref » renvoie à un état de référence, on donne :

- l'entropie d'une phase condensée de capacité thermique C :

$$S(T) = C \ln \frac{T}{T_{\text{ref}}} + S_{\text{ref}} \ ;$$

- l'entropie d'un gaz parfait :

$$S(T,P) = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T}{T_{\text{ref}}} - nR \ln \frac{P}{P_{\text{ref}}} + S_{\text{ref}} \ ;$$

$$S(T,V) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T}{T_{\text{ref}}} + nR \ln \frac{V}{V_{\text{ref}}} + S_{\text{ref}} \ ;$$

$$S(P,V) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{P}{P_{\text{ref}}} + \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{V}{V_{\text{ref}}} + S_{\text{ref}}.$$

★☆☆ Exercice 1 – Contact thermique entre deux solides

Deux solides de capacités thermiques respectives C_1 et C_2 et de températures initiales T_1 et T_2 sont mis en contact. Des parois rigides calorifugées isolent l'ensemble de l'extérieur.

1. Déterminer la température finale T_f.
2. Calculer la variation d'entropie du système global et calculer l'entropie créée au cours de la transformation. Faire l'application numérique pour $C_1 = C_2 = 444\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$ et $T_2 = 2T_1 = 600\,\text{K}$.

★☆☆ Exercice 2 – Mise à l'équilibre de deux gaz

Une enceinte indéformable aux parois calorifugées est séparée en deux compartiments par une cloison d'aire S étanche, diatherme et mobile sans frottement. Les deux compartiments contiennent un même gaz parfait. Dans l'état initial, la cloison est maintenue au milieu de l'enceinte. Le gaz du compartiment 1 est dans l'état (T_0, P_0, V_0) et le gaz du compartiment 2 dans l'état $(T_0, 2P_0, V_0)$. On laisse alors la cloison bouger librement jusqu'à ce que le système atteigne un état d'équilibre.

1. Déterminer l'état final.
2. Calculer l'entropie créée.

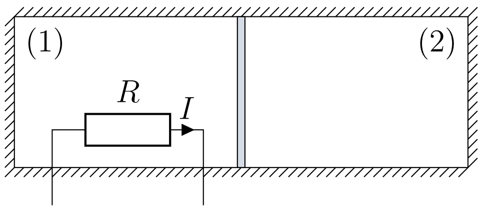
★★☆ Exercice 3 – Cryogénie

On étudie les compressions et détentes successives d'un gaz parfait diatomique. On suppose les transformations mécaniquement réversibles.

1. Le gaz subit une compression isotherme à la température $\theta_0 = 0\,°\text{C}$, de $P_0 = 1\,\text{bar}$ à $P_1 = 20\,\text{bar}$, puis une détende adiabatique jusqu'à P_0. Exprimer, puis calculer la température T_1 après ces deux transformations.
2. On recommence l'opération. Exprimer T_2, T_3 et en déduire T_n. Calculer T_{10}.
3. Quelles sont les limites de cette méthode ?

★★☆ Exercice 4 – Bilan entropique

Les deux compartiments contiennent le même gaz parfait de capacité thermique molaire $C_{v,m}$ et coefficient isentropique γ, initialement dans le même état (P_0, T_0, V_0). Les parois sont calorifugées ainsi que le piston. Ce dernier se déplace sans frottement dans le cylindre.



On fait passer un courant d'intensité I dans la résistance R de telle sorte que la transformation du gaz puisse être considérée comme quasi-statique et jusqu'à ce que la pression devienne P_f. On néglige la capacité thermique de la résistance.

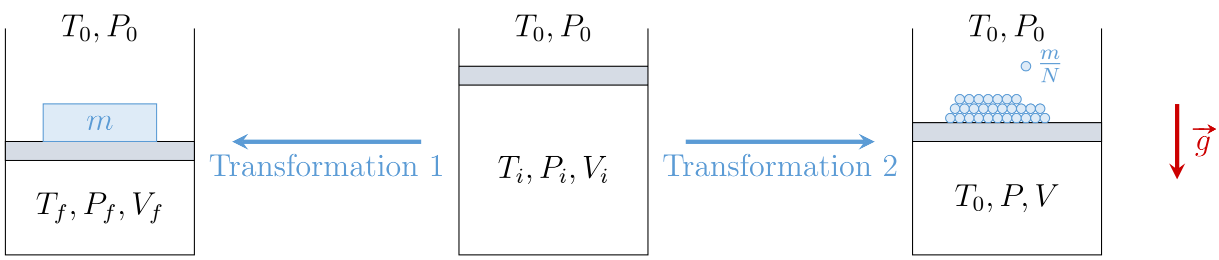
1. Déterminer l'état thermodynamique du gaz dans chaque compartiment.
2. Donner l'expression de l'énergie fournie par le générateur qui alimente la résistance en fonction des données.
3. Calculer la variation d'entropie du système complet (sans résistance).

★★☆ Exercice 5 – Compression d'un gaz parfait

On considère une quantité de matière n de gaz parfait de coefficient isentropique $\gamma = C_p/C_v$, contenu dans une enceinte en contact thermique avec l'atmosphère, assimilée à un thermostat à la température T_0. L'enceinte est fermée par un piston athermane (imperméable aux transferts thermiques), de masse négligeable et de section σ.

On dépose une masse m sur le piston de deux manières différentes :

- brutalement : toute la masse m est déposée en une seule fois (transformation 1) ;
- en N étapes : on ajoute un par un N grains de masse m/N (transformation 2).



Pour chacune des transformations décrites et représentées ci-dessus :

1. Déterminer les température, pression et volume à l'équilibre à la fin de la transformation.
2. Qualifier la transformation subie par le gaz.
3. Exprimer le travail et le transfert thermique reçus par le gaz.
4. À l'aide d'un bilan d'entropie, exprimer puis calculer l'entropie créée au cours de la transformation. Commenter.

Données : $n = 1\,\mathrm{mol}$; $\sigma = 100\,\mathrm{cm}^2$; $m = 10\,\mathrm{kg}$; $P_0 = 1\,\mathrm{bar}$; $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

★★☆ Exercice 6 – Détente de Joule – Gay-Lussac quasi-statique

Un gaz parfait, initialement dans l'état (P_0, T_0, V_0) subit une détente dans le vide jusqu'à un volume $V_0(1+x)$. On suppose la transformation adiabatique.

1. Déterminer la température du gaz lorsqu'il a atteint son nouvel état d'équilibre.
2. Exprimer la création d'entropie due à la transformation en fonction des variables d'état du gaz dans l'état initial et de x.
3. Donner l'expression de cette quantité pour $x \to 0$. Interpréter : est-il possible de rendre la détente de Joule – Gay-Lussac réversible en la découpant en un très grand nombre d'étapes ?

★★☆ Exercice 7 – Chauffage réverssible (?) d'un gaz parfait

On met un échantillon de gaz parfait initialement à la température T_0 en contact avec un thermostat à la température T_1.

1. Justifier que la transformation est irréversible.
2. Montrer que la transformation devient réversible en découpant la transformation en une succession de transformations infinitésimales.

★★☆ Exercice 8 – Possibilité d'un cycle

On considère une quantité de matière $n = 1\,\mathrm{mol}$ de gaz parfait qui subit la succession de transformations (idéalisées) suivantes :

- $A \to B$: détente isotherme de $P_A = 2\,\mathrm{bar}$ et $T_A = 300\,\mathrm{K}$ jusqu'à $P_B = 1\,\mathrm{bar}$ en restant en contact avec un thermostat de température $T_0 = T_A$;
- $B \to C$: évolution isobare jusqu'à $V_C = 20{,}5\,\mathrm{L}$ toujours en restant en contact avec le thermostat à T_0 ;
- $C \to A$: compression adiabatique réversible jusqu'à revenir à l'état A.

Le coefficient isentropique γ est pris égal à $7/5$.

1. Représenter ce cycle dans le diagramme de Watt (P, V).
2. À partir du diagramme, déterminer le signe du travail total des forces de pression au cours du cycle. En déduire s'il s'agit d'un cycle moteur ou d'un cycle récepteur.
3. Déterminer l'entropie créée entre A et B. Commenter.
4. Calculer la température en C, le travail W_{BC} et le transfert thermique Q_{BC} reçus par le gaz au cours de la transformation BC. En déduire l'entropie échangée avec le thermostat ainsi que l'entropie créée. Conclure : le cycle proposé est-il réalisable ? Le cycle inverse l'est-il ?

★★☆ Exercice 9 – Résistance thermique

On considère un barreau cylindrique homogène, de longueur L et de section S, dont les deux extrémités sont mises en contact avec deux thermostats qui les maintiennent à des températures T_1 et T_2. La paroi cylindrique est calorifugée, de telle sorte qu'aucune fuite thermique n'a lieu latéralement. Après un régime transitoire auquel nous n'allons pas nous intéresser ici, la température en chaque point M du barreau tend vers une valeur constante, dépendant de M : un régime stationnaire mais hors équilibre est atteint. On raisonne sur une durée Δt lorsque le régime stationnaire est établi. On constate alors que la puissance thermique $\mathcal{P}_{\text{th}}$ (transfert thermique par unité de temps) traversant toute section droite du cyclindre, orientée de la face 1 vers la face 2, s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{th}} = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{th}}},$$

où R_{th} est un coefficient phénoménologique appelé résistance thermique.

1. Quelle est la dimension de R_{th} ?

On considère comme système l'ensemble du barreau cylindrique, la surface de contrôle étant constituée des deux extrémités circulaires et de la paroi cylindrique.

2. Quelle est la variation d'entropie ΔS du barreau cylindrique au cours de l'intervalle de temps Δt ?

3. Exprimer l'entropie échangée $S_{\text{éch}}$ par le cylindre pendant Δt, et le taux d'échange d'entropie $\sigma_{\text{éch}} = S_{\text{éch}}/\Delta t$.

4. En déduire le taux de création d'entropie σ_{c}. Que devient cette entropie créée ?

5. Quelle conséquence cela impose-t-il sur le signe de R_{th} ?

★★★ Exercice 10 – Entrée de matière dans un récipient

On considère un récipient vide cylindrique de volume V_1, dont les parois sont calorifugées. On perce un trou de manière à ce que l'air ambiant (de pression P_0 et température T_0) y pénètre de façon adiabatique (transformation rapide). On note V_0 le volume initialement occupé par l'air assimilé à un gaz parfait qui entre dans le récipient, et γ son coefficient isentropique.

1. Exprimer la température finale T_1 de l'air du récipient.

2. Déterminer l'entropie créée, ainsi que la cause de l'irréversibilité.

Coups de pouce

Ex. 1 1. Cf. App. 4.
Ex. 2 1. Appliquer le premier principe au gaz des deux compartiments et utiliser les conditions d'équilibres. 2. Appliquer le deuxième principe au gaz des deux compartiments.
Ex. 3 1. Adiabatique réversible : Laplace !
Ex. 4 1. Le gaz 2 subit une transformation adiabatique réversible : Laplace ! 2. Quel système choisir pour simplifier le raisonnement ?
Ex. 6 1. Cf. TD T2 Ex. 2. 3. L'entropie créée pour une transformation entre V_0 et V_1 réalisée en $N \gg 1$ étapes est-elle nulle ?
Ex. 9 2. On ne s'intéresse qu'au régime permanent.
Ex. 10 1. Choisir un système fermé adapté !

✓ Éléments de correction

Ex. 1 1. $T_f = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2}$; 2. $S_c = \Delta S = C_1 \ln \frac{T_f}{T_1} + C_2 \ln \frac{T_f}{T_2} = 52{,}3\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$.

Ex. 2 1. $T_1 = T_2 = T_0$, $P_1 = P_2 = 3P_0/2$, $V_2 = 2V_1 = 4V_0/3$; 2. $S_c = \frac{P_0 V_0}{T_0} \ln \frac{32}{27} > 0$.

Ex. 3 1. $T_1 = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 116\,\text{K}$; 2. $T_n = r^n T_0$, avec $r = \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$, $T_{10} = 52\,\text{mK}$.

Ex. 4 1. $P_1 = P_f$, $V_1 = 2V_0 - V_0 \left(\frac{P_0}{P_f}\right)^{1/\gamma}$, $T_1 = T_0 \left(2\frac{P_f}{P_0} - \left(\frac{P_f}{P_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)$; $P_2 = P_f$, $V_2 = V_0 \left(\frac{P_0}{P_f}\right)^{1/\gamma}$, $T_2 = T_0 \left(\frac{P_0}{P_f}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}$; 2. $W_{\text{élec}} = \frac{P_0 V_0}{R T_0} C_{\text{v,m}}((T_1 - T_0) + (T_2 - T_0))$; 3.

$\Delta S = nC_{\mathrm{v,m}} \ln \frac{T_1}{T_0} + nR \ln \frac{V_2}{V_0}$, avec $n = \frac{P_0 V_0}{RT}$.

Ex. 5 1. $T_f = T_0$, $P_f = P_0 + \frac{mg}{\sigma}$, $V_f = nRT_0/P_f$; 2. transfo 1 : monobare, monotherme, irréversible ; transfo 2 : quasi-statique, isotherme ; 3. $Q_1 = -W_1 = P_f(V_f - V_0)$; $Q_2 = -W_2 = nRT_0 \ln \frac{V_f}{V_0}$; 4. $\Delta S = nR \ln \frac{V_f}{V_0}$, $S_{c,1} = nR\left(\frac{mg}{\sigma P_0} - \ln\left(1 + \frac{mg}{\sigma P_0}\right)\right) = 38\,\mathrm{mJ \cdot K^{-1}} > 0$, $S_{c,2} = 0$.

Ex. 6 1. $T_1 = T_0$; 2. $S_c = nR\ln(1+x)$; 3. $S_c \sim nRx$.

Ex. 8 2. $W < 0$; 3. $S_c = \Delta S - \frac{Q}{T_0} = 0$; 4. $T_C = T_A 2^{\frac{1}{\gamma}-1} = 246\,\mathrm{K}$, $W_{BC} = -P_B(V_C - V_B) = 440\,\mathrm{J}$, $Q_{BC} = \frac{\gamma nR}{\gamma-1}(T_C - T_B) = -1{,}55\,\mathrm{kJ}$, $S_{\text{éch}} = \frac{Q_{BC}}{T_0} = -5{,}17\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$, $S_c = \frac{\gamma nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_C}{T_B} - \frac{Q_{BC}}{T_0} = -0{,}54\,\mathrm{J \cdot K^{-1}} < 0$: impossible.

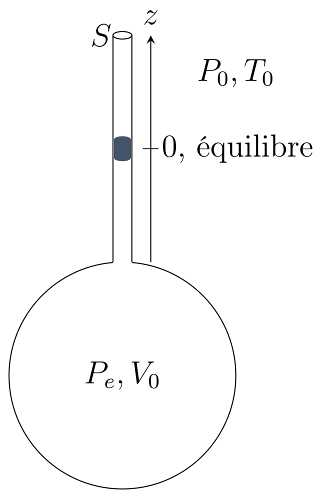
Ex. 9 1. $[R_{\mathrm{th}}] = \Theta \cdot \mathrm{T}^3 \cdot \mathrm{M}^{-1} \cdot \mathrm{L}^{-2}$, 2. $\Delta S = 0$; 3. $S_{\text{éch}} = \frac{\mathcal{P}_{\mathrm{th}}\Delta t}{T_1} - \frac{\mathcal{P}_{\mathrm{th}}\Delta t}{T_2}$, $\sigma_{\text{éch}} = \mathcal{P}_{\mathrm{th}}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = -\frac{(T_1-T_2)^2}{R_{\mathrm{th}}}$; 4. $\sigma_c = -\sigma_{\text{éch}} = \frac{(T_1-T_2)^2}{R_{\mathrm{th}}}$, 5. $\sigma_c > 0$, donc $R_{\mathrm{th}} > 0$.

Ex. 10 1. $T_1 = \gamma T_0$; 2. $S_c = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln \gamma > 0$.

Exercice 11 – Expérience de Rüchardt – Oral CCP

On considère un récipient fermé par un piston M de masse m, mobile sans frottement dans le col cylindrique vertical de section S. Le récipient contient n moles d'un gaz parfait dont on cherche à déterminer l'exposant adiabatique γ (ou coefficient isentropique) constant.

À l'extérieur, l'air est à la pression $P_0 =$ cste et à l'équilibre, le volume intérieur du récipient est V_0. Le piston est déplacé de sa position d'équilibre, on note $P = P_e + \mathrm{d}P$ la pression dans le récipient à un instant quelconque avec $\mathrm{d}P \ll P_e$ et toutes les transformations adiabatiques et réversibles.



1. Déterminer l'équation du mouvement du piston.
2. En déduire une méthode pour mesurer γ.