TD M7 – Mouvement d'un solide

★☆☆ Exercice 1 – Échauffements

Les questions sont indépendantes.

1. Les pales d'une éolienne, d'une longueur de 50 m, tournent à environ 14 tr/min. Déterminer la vitesse de l'extrémité des pales et l'exprimer en $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.
2. Un hélicoptère Robinson R44 nécessite au décollage une puissance $\mathcal{P} = 180\,\mathrm{cv}$, avec des pales tournant environ à 7 tr/s. Sachant qu'un cheval vapeur (1 cv) vaut 736 W, déterminer la norme du moment du couple exercé par le moteur sur les pales.
3. Dans le référentiel géocentrique, on assimile la Terre à une boule homogène de masse $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ et de rayon $R = 6380\,\mathrm{km}$ tournant autour de l'axe des pôles avec une période $T = 86\,164\,\mathrm{s}$. Sachant que son moment d'inertie est $J = 2M_T R^2/5$, déterminer l'énergie cinétique de rotation de la Terre.

★☆☆ Exercice 2 – Portage d'une poutre

Deux personnes portent une poutre de longueur $2L$ et de masse m. Une personne se trouve tout à l'arrière de la poutre (point M), l'autre se situe à une distance d en avant du centre de gravité G de la poutre (point N). On suppose que les forces exercées par les deux personnes sont verticales et on considère tout d'abord la situation où les personnes ont la même taille : la poutre est horizontale.

1. Faire un schéma. Les forces exercées par les deux personnes sont-elles les mêmes ?
2. Déterminer alors les normes des forces exercées en M et en N par les deux personnes.

Les personnes montent ensuite un escalier, toujours en tenant la poutre.

3. Faire un schéma de la situation. Les forces exercées par les deux personnes sont-elles les mêmes ?
4. Déterminer à nouveau les normes des forces exercées en M et N par les deux personnes. Commentaires ?

★★☆ Exercice 3 – Démarrage d'une machine tournante

Une machine est entraînée par un moteur électrique de fréquence nominale 1500 tr/min. Celui-ci exerce un couple moteur constant de $40\,\mathrm{N \cdot m}$. Le moment d'inertie de l'ensemble de la chaîne cinématique rapporté à l'axe du rotor est de $12{,}5\,\mathrm{kg \cdot m^2}$. Le couple résistant dû aux frottements est supposé constant et égal à $4\,\mathrm{N \cdot m}$.

1. Calculer l'accélération du moteur pendant le démarrage.
2. Calculer le temps mis pour atteindre la fréquence nominale.

On tient maintenant compte d'une force de frottement visqueux qui exerce un couple proportionnel à la vitesse angulaire de rotation du type $\Gamma = -\alpha\dot{\theta}$.

3. Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
4. Estimer la valeur de α permettant d'obtenir une vitesse angulaire limite de 1500 tr/min.
5. Déterminer l'évolution temporelle de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ ainsi que le temps mis pour atteindre 99 % de la vitesse angulaire limite.

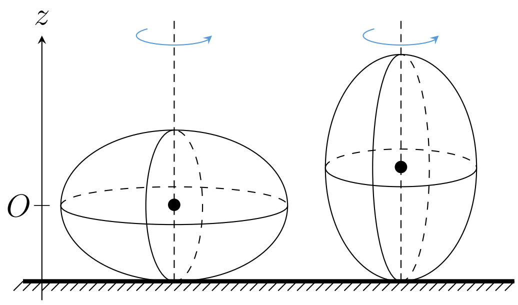
★★★ Exercice 4 – Chute d'un arbre

On assimile un arbre à une tige homogène de longueur ℓ, de masse m et de moment d'inertie par rapport à son extrémité $J = m\ell^2/3$. On scie l'arbre à sa base et celui-ci bascule en tournant autour de son point d'appui sur le sol, fixe et modélisé par une liaison pivot parfaite. On repère la position de l'arbre par son angle θ avec la verticale. À $t = 0$ l'arbre est à la position $\theta_0 = 5°$ et est immobile.

1. Dresser un schéma du système en y représentant les forces subies par l'arbre.
2. Établir l'équation du mouvement de la chute de l'arbre.
3. Montrer qu'à un angle donné, sa vitesse angulaire s'écrit
$$\omega(\theta) = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{\ell}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}.$$
4. Montrer que cette relation peut se réécrire
$$\sqrt{\frac{3g}{\ell}}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}.$$
5. Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m en considérant que $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et en admettant que, pour $\theta_0 = 5°$:
$$\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = 5{,}1.$$
6. En appliquant le PFD au centre de masse de l'arbre, déterminer les composantes R_r et R_θ de la réaction $\vec{R}$ de la liaison pivot, projetées selon $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$. On les exprimera tout d'abord en fonction de $\ddot{\theta}$, $\dot{\theta}^2$ et θ, puis en fonction de θ uniquement (et des constantes du problème bien sûr).

★★★ Exercice 5 – Œuf en rotation

Un œuf dur posé sur une table est mis en rotation autour de son petit axe. On constate qu'au delà d'une certaine vitesse angulaire, l'œuf se redresse spontanément et se met à tourner autour de son grand axe. On ne considère ici que les états initiaux et finaux : on ne s'intéresse pas au mécanisme transitoire du redressement de l'œuf.



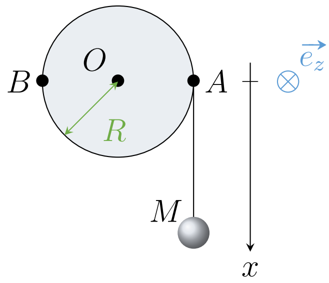
On modélise l'œuf par un ellipsoïde de révolution homogène de masse m et de demi-axes a et b, avec $b < a$. Les moments principaux d'inertie d'un ellipsoïde par rapport à son centre de masse sont $J_1 = 2mb^2/5$ dans le cas vertical et $J_2 = m(b^2 + a^2)/5$ dans le cas horizontal.

https://youtu.be/AtzZQ3uFiyQ?t=89

1. Exprimer l'énergie mécanique totale d'un œuf tournant à la vitesse angulaire Ω, en position horizontale et en position verticale.
2. Tracer ces énergies en fonction de Ω sur un même graphe. Montrer qu'au-delà d'une certaine vitesse angulaire Ω_c, la position verticale est d'énergie inférieure à la position horizontale. Calculer Ω_c pour $a = 3\,\mathrm{cm}$, $b = 2\,\mathrm{cm}$ et $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

★★☆ Exercice 6 – Étude d'une poulie

Une masse $m = 5{,}0\,\mathrm{kg}$ est suspendue à l'extrémité M d'une corde enroulée sur une poulie de masse $m_p = 1{,}0\,\mathrm{kg}$ et de rayon $R = 10\,\mathrm{cm}$, en liaison pivot idéale autour de son axe (Oz) avec un support fixe. On prendra $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe vaut $J = m_p R^2/2$.



1. La poulie est en rotation uniforme autour de son axe fixe (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Déterminer la vitesse $\dot{x}$ de la masse m.
2. La poulie est retenue par un opérateur qui applique une force en B. Déterminer la force que l'opérateur doit exercer pour empêcher la poulie de tourner.
3. Avec le même dispositif, l'opérateur lâche la poulie. Déterminer l'accélération angulaire de la poulie, l'accélération linéaire de la masse m et la tension de la corde.

★★★ Exercice 7 – Enseigne de saloon

Au cours d'un duel dans l'habituelle paisible petite ville de Daisy Town, une enseigne de saloon est frappée par une balle perdue. L'enseigne est une planche de bois de $h = 40\,\mathrm{cm}$ de haut par $60\,\mathrm{cm}$ de large et a une masse $M = 5\,\mathrm{kg}$. Étant suspendue par deux crochets à une potence horizontale, on la considère comme liée à celle-ci par une liaison pivot idéale horizontale. On note alors $J = Mh^2/3$ son moment d'inertie par rapport à cet axe.

Elle est frappée par la balle de colt de masse $m = 15\,\mathrm{g}$, arrivant horizontalement à une vitesse $v_0 = 300\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et la frappant en plein centre. On considère que le choc est inélastique (l'énergie cinétique n'est pas conservée, à cause de la déformation de la balle et de la planche), et que la balle reste solidaire de la planche.

1. Déterminer la vitesse angulaire ω_0 de l'enseigne après impact de la balle.
2. Déterminer l'amplitude θ_m des oscillations de l'enseigne.
3. Quelle énergie est dissipée au moment de l'impact ?

Coups de pouce

Ex. 2 2. Traduire la condition d'équilibre de la poutre en utilisant deux théorèmes : la poutre ne tourne pas et son centre de masse est immobile.
Ex. 3 Ce n'est pas parce que l'exercice ne donne que des valeurs numériques que l'on s'affranchit des expressions littérales. Commencer par définir une notation pour chacune des grandeurs impliquées. 4. Que devient l'équation différentielle en régime permanent ?
Ex. 4 1. Représenter convenablement la base cylindrique : l'orientation de l'angle θ doit être cohérente avec le sens de $\overrightarrow{e_z}$. 3. L'équation du mouvement ne peut s'intégrer directement. Mais si on la multiplie par $\dot{\theta}$, tout devient plus simple ! Attention à bien tenir compte des conditions initiales. 4. Il s'agit d'une séparation des variables. 5. On intègre sur deux variables différentes : les bornes d'intégrations doivent être cohérentes. C'est-à-dire qu'elles doivent traduire le même évènement.
Ex. 6 1. Quelle longueur s'ajoute au fil quand la poulie fait un tour complet ? Et pour un angle θ ? 2. Quelle est la force exercée par le fil en A ? 3. La force exercée par le fil en A n'est plus la même. Quelle est-elle ?
Ex. 7 1. Le TMC s'applique de la même façon au système {enseigne + balle}. 2. Un raisonnement énergétique entre deux instants bien choisis s'avère efficace.

✓ Éléments de correction

Ex. 1 1. $v = R\Omega = 73\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 2{,}6\times 10^2\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$; 2. $\Gamma = \mathcal{P}/\Omega = 3{,}0\,\mathrm{kN\cdot m}$; 3. $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J\Omega^2 = \frac{2\pi^2 J}{T^2} = 2{,}6\times 10^{29}\,\mathrm{J}$.
Ex. 2 2. $F_M = \frac{mgd}{L+d}$, $F_N = \frac{mgL}{L+d}$; 4. Idem.
Ex. 3 1. $\ddot{\theta} = \frac{\Gamma_m-\Gamma_f}{J} = 2{,}88\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$; 2. $\Delta t = \frac{J\Omega}{\Gamma_m-\Gamma_f} = 54{,}5\,\mathrm{s}$; 3. $\ddot{\theta}+\frac{\alpha}{J}\dot{\theta} = \frac{\Gamma_m-\Gamma_f}{J}$; 4. $\alpha = \frac{\Gamma_m-\Gamma_f}{\Omega} = 0{,}229\,\mathrm{J\cdot s}$; 5. $\omega(t) = \dot{\theta}(t) = \Omega_l\left(1-e^{-t/\tau}\right)$, $\tau = \frac{J}{\alpha}$, $\Omega_l = \frac{\Gamma_m-\Gamma_f}{\alpha}$.
Ex. 4 2. $\ddot{\theta} - \frac{3g}{2\ell}\sin\theta = 0$; 5. $\tau = 5{,}1\sqrt{\frac{\ell}{3g}} = 5{,}1\,\mathrm{s}$; 6. $R_r = \frac{mg}{2}\left(5\cos\theta - 3\cos\theta_0\right)$, $R_\theta = -\frac{mg}{4}\sin\theta$.
Ex. 5 1. $\mathcal{E}_h = m\frac{b^2+a^2}{10}\Omega^2$, $\mathcal{E}_v = m\frac{b^2}{5}\Omega^2 + mg(a-b)$; 2. $\Omega_c = \sqrt{\frac{10g}{a+b}} = 44{,}7\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.
Ex. 6 1. $\dot{x} = R\dot{\theta}$; 2. $\vec{F} = mg\overrightarrow{e_x}$; 3. $\ddot{\theta} = \frac{Rmg}{J+mR^2} = 91\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, $\ddot{x} = R\ddot{\theta} = 9{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $T = \frac{J\ddot{\theta}}{R} = 4{,}5\,\mathrm{N}$.
Ex. 7 1. $\omega_0 \approx \frac{3m}{2Mh}v_0 = 3{,}4\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$; 2. $\theta_m = \arccos\left(1-\frac{h}{3g}\omega_0^2\right) = 32°$; 3. $W \approx \frac{1}{2}J\omega_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -6{,}7\times 10^2\,\mathrm{J}$

Exercice 8 – Résolution de problème

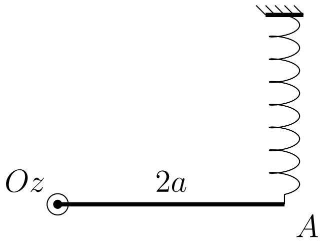
Estimer la vitesse à laquelle le manche d'un râteau percutera le front du jardinier imprudent qui aurait le malheur de marcher dessus.

Exercice 9 – Falling faster than g...

Interpréter la vidéo, en comparant notamment le temps de chute de la bille et de l'extrémité de la tige.

Exercice 10 – Pendule lesté – Oral CCP

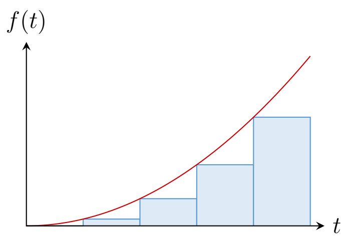
On considère le système mécanique représenté ci-contre, constitué d'une barre de masse m, de longueur $OA = 2a$, libre de tourner sans frottement autour de l'axe (Oz). Son moment d'inertie par rapport à cet axe vaut $J_z = 4ma^2/3$. Elle est attachée en A à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k. L'autre extrémité du ressort est fixe.

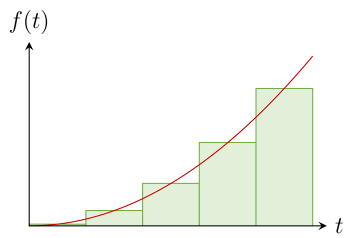


1. Dans la position d'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical. Donner la longueur l du ressort à l'équilibre en fonction de k et de l_0.
2. La barre est légèrement écartée de sa position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale. Déterminer la période des petites oscillations.

Exercice 11 – Méthode des rectangles

La méthode des rectangles permet d'approcher numériquement la valeur d'une intégrale. Pour une fonction continue $f(t)$, on approche l'aire $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par une somme des aires des rectangles représentés ci-dessous.





Méthode des rectangles à gauche : la valeur de $f(t)$ sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}[$ est approchée par $f(t_k)$. On a

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k).$$

Méthode des rectangles au milieu : la valeur de $f(t)$ sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}[$ est approchée par $f\left(\frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right)$. On a

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right).$$

Il existe aussi la méthode des rectangles à droite, la méthode des trapèzes, etc.

1. Calculer numériquement l'intégrale de l'exercice 4 par la méthode des rectangles.
2. Commenter les résultats obtenus pour différentes valeurs de n.

La fonction `quad` *(hors programme) de la bibliothèque* `scipy.integrate` *est toute indiquée pour le calcul d'intégrales.*