DM18 – Mécanique

Exercice 1 – Détermination expérimentale de la masse de la Terre

La mesure précise de la masse M d'un astre n'est pas simple : elle nécessite de connaitre précisément la valeur de la constante gravitationnelle G. Actuellement, cette dernière est « mal » connue : la valeur recommandée par le CODATA est $G = (6{,}674\,30 \pm 0{,}000\,15) \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$, soit une incertitude relative de $2{,}2 \times 10^{-5}$. En revanche, la détermination du produit GM, ou paramètre gravitationnel standard, peut se faire précisément en exploitant la troisième loi de Kepler : celui de la Terre est connu avec une incertitude relative de seulement 2×10^{-9}.

On s'intéresse à quelques expériences permettant de remonter progressivement à une valeur expérimentale de la masse M_T de la Terre.

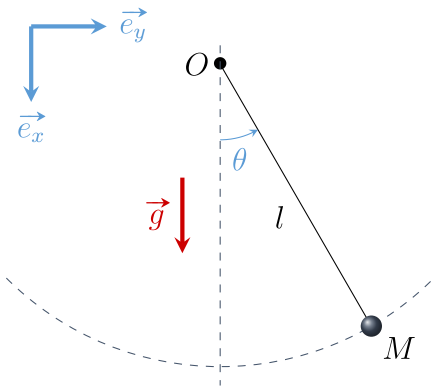
Pendule simple

On considère un pendule simple constitué d'un fil de longueur $l = 2{,}0\,\mathrm{m}$ et de masse négligeable. Il est fixé en O et on attache à son extrémité en M une sphère de masse volumique $\rho = 2000\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et de rayon $r = 1{,}0\,\mathrm{cm}$.

Le système est soumis à une force de frottement fluide définie par la formule de Stokes :

$$\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v},$$

où $\vec{v}$ est la vitesse de M et $\eta = 1{,}8 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}}$, la viscosité de l'air ambiant.



1. Reproduire le schéma ci-dessus, puis représenter le vecteur $\vec{e_z}$ de la base cartésienne, le vecteur vitesse $\vec{v}$ (on suppose $\dot{\theta} > 0$) et les forces qui agissent sur M.
2. Établir l'équation du mouvement de M en utilisant le théorème du moment cinétique.
3. Dans le cadre de l'approximation des petits angles, montrer que l'équation différentielle s'écrit sous sa forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\theta = 0,$$

où ω_0 est la pulsation propre que l'on exprimera en fonction de l et g et où $Q = \dfrac{2\rho r^2}{9\eta}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

4. Calculer la valeur numérique du facteur de qualité Q, en prenant $g \approx 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Que peut-on en conclure ?

Un expérimentateur souhaite déterminer la période des oscillations pour quelques valeurs de la longueur l du pendule. Il mesure à l'aide d'un chronomètre la durée Δt correspondant à dix périodes. Avec son protocole, il évalue l'imprécision sur la mesure de l à 5 mm et celle sur la mesure de Δt à 0,2 s. Le tableau ci-dessous indique les résultats de ses mesures.

Longueur l (m)	0,520	0,979	1,516	2,035	2,461	3,034
Durée Δt (s)	14,5	19,8	24,7	28,7	31,3	35,0

python

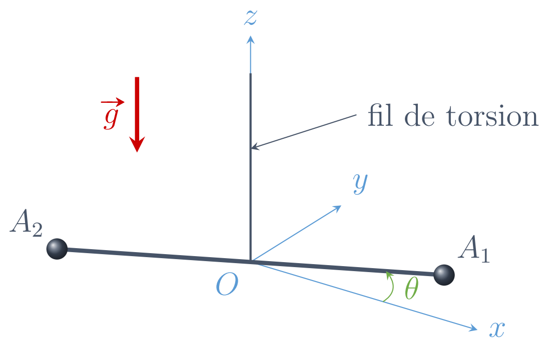
5. À partir de ces données et en s'appuyant sur une régression linéaire avec `np.polyfit`, déterminer une valeur de l'accélération de la pesanteur g accompagnée de son incertitude-type. On représentera qualitativement l'allure de la courbe ajustée.

6. Exprimer l'accélération de la pesanteur g en fonction de la constante gravitationnelle G, de la masse M_T de la terre et de son rayon R_T.

Dans la suite de l'exercice, on cherche à déterminer les valeurs expérimentales de G, R_T pour enfin obtenir celle de M_T.

Détermination de G avec l'expérience de Cavendish (1798)

On considère le pendule de torsion représenté ci-contre. Deux sphères assimilées à des points matériels de masse m sont fixées aux extrémités d'une tige A_1A_2 de masse négligeable et de longueur $2d$. La position de la tige est repéré par l'angle θ qu'elle forme avec l'axe (Ox). Le système S, formé des deux sphères et de la tige, est suspendu au milieu O de la tige à un fil de torsion de raideur $C > 0$, qui exerce un couple de rappel $\vec{\Gamma} = -C\theta\vec{e_z}$.

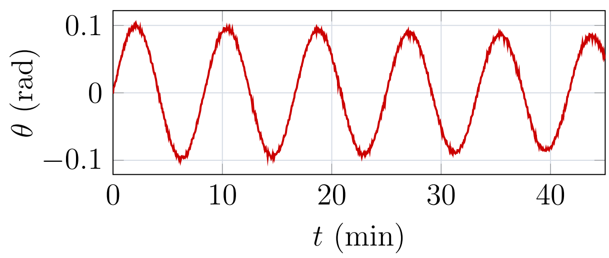


On note $J = 2md^2$ le moment d'inertie du système par rapport à l'axe (Oz). Initialement, on décale légèrement la tige de la position d'équilibre $\theta = 0$: le système se met à osciller dans le plan (Oxy) à la période T_c. On néglige les frottements dans l'étude théorique qui suit.

7. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ.

8. En déduire l'expression de la constante de raideur C du fil de torsion en fonction de m, d et T_c. Préciser la dimension et l'unité de C.

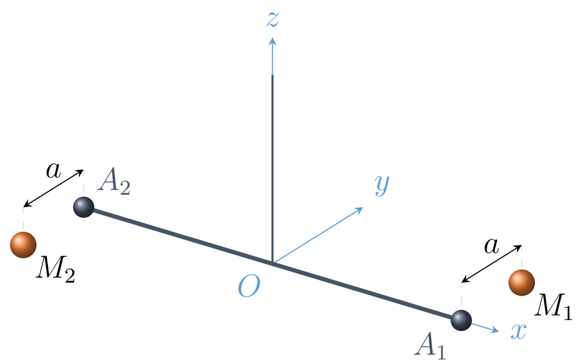
Un relevé expérimental de $\theta(t)$ permet d'obtenir la courbe représentée ci-contre.



9. Déterminer la valeur de la période T_c en décrivant succinctement la méthode utilisée. On présentera le résultat de la mesure accompagné de son incertitude-type.

Le système est maintenant à l'équilibre. Aux points M_1 et M_2, respectivement séparés d'une distance $a \ll d$ de A_1 et A_2, on place deux masses $M \gg m$.

Sous l'effet des interactions gravitationnelles entre les masses m et M, la tige tourne d'un angle θ_0 très faible mais mesurable. La rotation étant très faible, on considère que la distance a reste constante lors de l'opération.



10. Justifier que l'on peut négliger les interactions entre M_1 et A_2 d'une part, puis entre M_2 et A_1 d'autre part, par rapport aux autres interactions en jeu dans cette étude.

11. Rappeler la définition d'un couple et justifier que les interactions gravitationnelles qui s'exercent sur le système forment un couple dont on exprimera le moment $\vec{\Gamma}_g$ en fonction de m, M, d, a et G.

12. En appliquant le théorème du moment cinétique à l'équilibre, exprimer la constante gravitationnelle G en fonction de C, θ_0, a, d, m et M.

13. Montrer que la constante gravitationnelle s'exprime

$$G = \frac{4\pi^2 da^2}{MT_c^2}\theta_0.$$

Calculer numériquement G et son incertitude, avec $d = (100{,}0 \pm 0{,}5)$ cm, $M = (30{,}00 \pm 0{,}01)$ kg, $a = (10{,}0 \pm 0{,}2)$ cm et $\theta_0 = (1{,}3 \pm 0{,}1) \times 10^{-3}$ rad. Cette valeur est-elle en accord avec la valeur actuellement recommandée ?

14. Proposer une méthode optique permettant de mesurer un angle aussi petit que θ_0. Faire un schéma.

Détermination de R_T avec l'ISS

On considère le cas d'un satellite de masse m_s en orbite circulaire de rayon R autour de la Terre. On considère que ce dernier n'est soumis qu'à l'interaction gravitationnelle avec la Terre.

15. Montrer que le mouvement est uniforme. En déduire l'expression de la norme v de la vitesse du satellite en fonction de G, M_T et R.

16. Retrouver alors la troisième loi de Kepler. On notera T_s la période de révolution du satellite autour de la Terre.

La station spatiale internationale suit une orbite quasi circulaire autour de la Terre à une altitude $h = 405$ km. Sa période orbitale T_s est de 92 minutes et 40 secondes. On suppose que ces quantités sont connues avec une très grande précision.

17. Établir une relation entre g, R_T, h et T_s à l'aide de la question 6.

18. En remarquant que $h \ll R_T$, en déduire que

$$R_T \approx g\frac{T_s^2}{4\pi^2} - 3h.$$

Faire l'application numérique.

19. Comparer le résultat précédent à la valeur obtenue en résolvant numériquement l'équation établie à la question 17, à l'aide de la fonction `scipy.optimize.bisect` (cf. TD M6 Ex. 9).

Conclusion

20. Exprimer finalement la masse M_T de la Terre en fonction des grandeurs dont les valeurs numériques ont été obtenues précédemment. Calculer l'incertitude-type associée. Quelle grandeur limite la précision de la valeur obtenue ?

21. Exprimer, puis calculer la masse volumique moyenne ρ_T de la Terre. Commenter, en comparant la valeur obtenue à des valeurs pertinentes issues de vos connaissances ou d'Internet.