TD M6 – Mouvement dans un champ de gravitation newtonien
Correction

Exercice 1 – Échauffements

1. On considère une particule M de masse m en orbite autour d'un astre O de masse $M_O \gg m$. On étudie le mouvement dans le référentiel lié à l'astre, supposé galiléen. Le point M n'est soumis qu'à la force d'interaction gravitationnelle qui est radiale :

$$\overrightarrow{F_G} = -G\frac{mM_O}{r^2}\overrightarrow{e_r}.$$

Le mouvement est plan : en coordonnées cylindriques, l'accélération de M s'écrit

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}.$$

La projection du PFD selon $\overrightarrow{e_\theta}$ donne

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0,$$

soit en multipliant par r,

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0.$$

donc $r^2\dot{\theta} = \text{cste}$. On retrouve la conservation de la constante des aires

$$\boxed{\mathcal{C} = r^2\dot{\theta} = \text{cste}.}$$

2. En identifiant le poids à la force d'attraction gravitationnelle à la surface de la Terre,[1] on obtient :

$$\cancel{m}g = G\frac{\cancel{m}M_T}{R_T^2}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{g = \frac{GM_T}{R_T^2}.}$$

A.N. : $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

3. On applique le PFD à l'ISS dans le référentiel géocentrique. La projection sur le vecteur normal $\overrightarrow{e_N}$ du repère de Frenet, on a immédiatement, pour une orbite circulaire uniforme de rayon $R_T + h$,

$$m\frac{v^2}{R_T + h} = \frac{GmM_T}{(R_T + h)^2}, \quad \text{d'où} \quad v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}.$$

1. L'accélération de la pesanteur tient en fait aussi compte de l'accélération d'entrainement liée à la rotation de la Terre sur elle même. Cet effet, de l'ordre de $0{,}03\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ reste faible devant g. Il est lié au caractère non galiléen du référentiel terrestre et sera discuté en début de deuxième année.

Or d'après la question précédente, $g = GM_T/R_T^2$, d'où

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{gR_T^2}{R_T + h}}.}$$

A.N. : $v = 7{,}68\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.
D'autre part on a aussi

$$v = \frac{2\pi(R_T + h)}{T}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v}.}$$

A.N. : $T = 5{,}53 \times 10^3\,\mathrm{s} = 1{,}54\,\mathrm{h}$.

4. On commence par relier la durée et la hauteur de la chute à l'accélération de la pesanteur g_L sur la Lune. Il s'agit d'un mouvement de chute libre : le PFD donne (cf. TD M2)

$$g_L = \frac{2h}{\Delta t^2}.$$

D'autre part, le même raisonnement qu'à la question 2 aboutit à

$$g_L = \frac{GM_L}{R_L^2}.$$

On en déduit

$$\boxed{M_L = \frac{2hR_L^2}{G\Delta t^2}.}$$

A.N. : $M_L = 7{,}6 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}$.

Exercice 2 – Vitesses cosmiques

1. La première vitesse cosmique correspond à la vitesse d'une particule sur une orbite circulaire de rayon R, d'où

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}.}$$

Pour la Terre, $v1 = 7{,}9\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

2. On néglige les frottements de sorte que le mouvement du corps est conservatif. Pour que le corps puisse s'éloigner infiniment de l'astre, il doit être dans un état de diffusion, c'est-à-dire que son énergie mécanique doit être positive ou nulle. Dans le référentiel astrocentrique, l'énergie mécanique s'écrit

$$\mathcal{E}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{d},$$

où v_0 est la vitesse initiale du corps à la distance d de l'astre. La vitesse de libération correspond à la valeur v_2 de la vitesse v_0 telle que l'énergie mécanique est nulle, si bien que

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{d}}.}$$

A.N. : Avec $d = R_T$ et $M = M_T$, $v_2 = 11{,}2\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

3. On cherche les valeurs du rayon R de l'astre de masse M pour lesquelles la vitesse de libération à sa surface est supérieure à la vitesse de la lumière. Avec le résultat précédant

$$v_2 \geqslant c \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{R \leqslant \frac{2GM}{c^2} = R_S.}$$

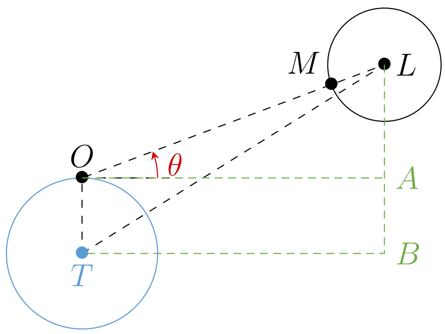
A.N. : Avec $M = M_T$, on trouve $R_S = 8{,}8\,\text{mm}$! Cette application numérique traduit la grande compacité des trous noirs.

Exercice 3 – Masse de la Terre

1. La distance OM correspond à la moitié de la distance parcourue par la lumière au cours d'un aller-retour, soit

$$\boxed{OM = \frac{c\tau}{2}.}$$

A.N. $OM = 377{,}1 \times 10^3\,\text{km}$.



En utilisant les triangles OAL et TBL, respectivement rectangles en A et B, on a

$$LA = OL\sin\theta = (OM + R_L)\sin\theta$$

et

$$\begin{aligned} TL &= \sqrt{TB^2 + BL^2} \\ &= \sqrt{(OL\cos\theta)^2 + (R_T + LA)^2}. \end{aligned}$$

En combinant les deux relations, on obtient

$$TL = \sqrt{\left(\frac{c\tau}{2} + R_L\right)^2 \cos^2\theta + \left(R_T + \left(\frac{c\tau}{2} + R_L\right)\sin\theta\right)^2},$$

d'où, en développant et avec $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\boxed{TL = \sqrt{\left(\frac{c\tau}{2} + R_L\right)^2 + R_T^2 + 2R_T\left(\frac{c\tau}{2} + R_L\right)\sin\theta}.}$$

A.N. : $TL = 3{,}834 \times 10^8\,\text{m}$.

2. Cf. cours. Avec les notations de l'énoncé :

$$\boxed{\frac{T_L^2}{TL^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}.}$$

3. On déduit directement de la troisième loi de Kepler

$$\boxed{M_T = \frac{4\pi^2 TL^3}{GT_L^2}.}$$

A.N. : $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

Exercice 4 – Freinage

Corrigé en classe.

Exercice 5 – Paramètre d'impact

1. Il s'agit d'un mouvement à force centrale, le moment cinétique de P est conservé. On introduit alors la constante des aires $\mathcal{C} = r^2\dot{\theta}$.
Quand le point matériel est situé très loin de S, on a $\vec{v}_0 = v_0\vec{e_x}$. Son moment cinétique s'exprime alors

$$\vec{L}_S = (SH\vec{e_y} - HP\vec{e_x}) \wedge mv_0\vec{e_x} = -mbv_0\vec{e_z}.$$

d'où

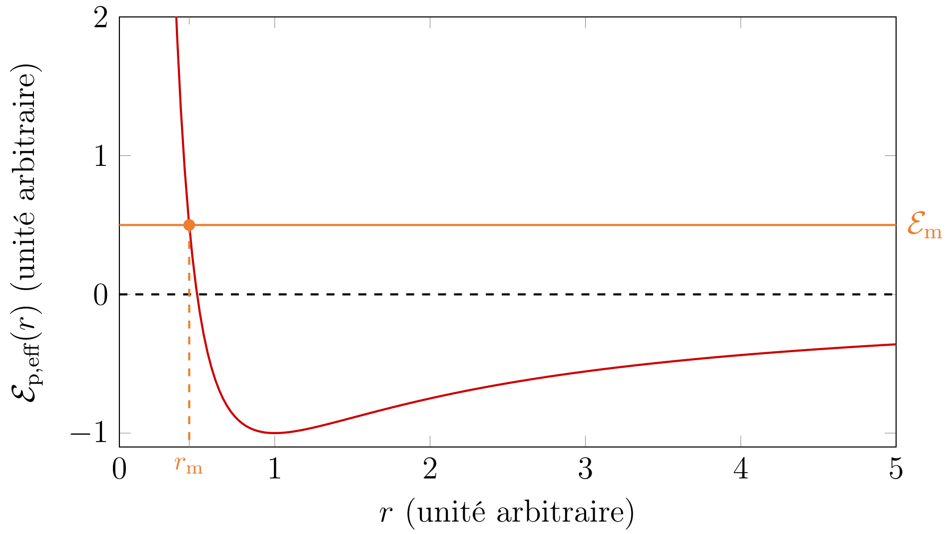
$$\boxed{\mathcal{C} = bv_0.}$$

2. Cf. cours.

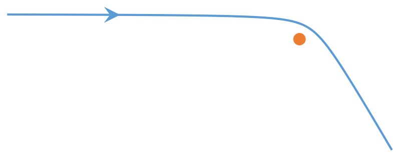
$$\boxed{\mathcal{E}_\mathrm{m} = \mathcal{E}_\mathrm{c} + \mathcal{E}_\mathrm{p} = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) - G\frac{mM}{r}.}$$

3. Cf. cours.

$$\mathcal{E}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_\mathrm{p,eff}(r), \quad \text{avec} \quad \boxed{\mathcal{E}_\mathrm{p,eff}(r) = \frac{m\mathcal{C}^2}{2r^2} - G\frac{mM}{r}.}$$



4. Le point P est dans un état de diffusion, ce qui se traduit par une énergie mécanique positive (cf. ci-dessus). La trajectoire du point P est une branche d'hyperbole.



5. Lorsque la distance SP est minimale, on a $\dot{r} = 0$. En coordonnées cylindriques, on a donc alors

$$\overrightarrow{SP} = r\overrightarrow{e_r} \quad \text{et} \quad \vec{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}., \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{v} \perp \overrightarrow{SP}.}$$

6. La constante des aires s'exprime $\|\overrightarrow{SP} \wedge \vec{v}\|$. En particulier, à la distance minimale d'approche, on a

$$\|\overrightarrow{SP} \wedge \vec{v}\| = r_{\min} v_1.$$

Puisque cette quantité est conservée au cours du mouvement, on a

$$\boxed{b v_0 = r_{\min} v_1.}$$

7. Le système n'est soumis qu'à la force d'interaction gravitationnelle qui est conservative. La conservation de l'énergie mécanique implique que l'énergie mécanique loin de l'astre est la même qu'à la distance minimale d'approche, soit :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 - G\frac{mM}{r_{\min}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{v_0^2 = v_1^2 - \frac{2GM}{r_{\min}}.}$$

On en déduit

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{G^2M^2 + b^2 v_0^4} - GM}{v_0^2}.$$

8. En utilisant les résultats des deux équations précédentes, on obtient

$$v_0^2 r_{\min}^2 + 2GMr_{\min} = b^2 v_0^2, \quad \text{d'où} \quad b = \sqrt{r_{\min}^2 + 2GMr_{\min}}.$$

La collision est évitée si $r_{\min} > R$, soit

$$\boxed{b > \sqrt{R^2 + 2R\frac{GM}{v_0^2}}.}$$

Exercice 6 – Voyage vers Mars

1. Au périhélie, l'énergie mécanique du véhicule est

$$\mathcal{E}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv_P^2 - G\frac{mM}{r_T},$$

où M est la masse du Soleil. L'énergie mécanique et conservée et vaut, pour une orbite elliptique de grand-axe $2a = r_T + r_M$,

$$\mathcal{E}_\mathrm{m} = -G\frac{mM}{2a}.$$

Ce résultat n'est pas à connaitre mais il faut savoir le démontrer pour une orbite circulaire de rayon a. Il se généralise ensuite au cas elliptique avec a le demi grand-axe.
Le produit GM est obtenu avec la troisième loi de Kepler appliquée à la Terre :

$$\frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Finalement, on a

$$\boxed{v_P = \frac{2\pi r_T}{T_T}\sqrt{\frac{2r_M}{r_T + r_M}} = v_T\sqrt{\frac{2r_M}{r_T + r_M}}.}$$

A.N. : $v_P = 33\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

2. La vitesse de libération (Ex. 2) à la surface de la Terre est donnée par

$$\boxed{v_L = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}},}$$

où M_T et R_T sont la masse et le rayon de la Terre.

3. La distance entre le projectile et la Terre passe de R_T à $d \gg R_T$, tandis que la distance entre le projectile et le Soleil reste environ égale à r_T. Par conservation de l'énergie mécanique, on a alors à l'EI et à l'EF

$$\mathcal{E}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM_T}{R_T} - G\frac{GmM}{r_T} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - \frac{GmM}{r_T},$$

d'où en faisant intervenir la vitesse de libération déterminée précédemment,

$$\boxed{v_\infty = \sqrt{v_0^2 - v_L^2}.}$$

4. Il faut tirer le projectile dans la direction et le sens du mouvement de la Terre pour profiter de son élan.

5. En remplaçant v_∞ dans l'équation obtenue à la question 3 par l'expression donnée dans l'énoncé, on obtient

$$\boxed{v_0 = \sqrt{(v_P - v_T)^2 + v_L^2}.}$$

La durée τ de l'aller correspond à une demie-période orbitale. Avec la troisième loi de Kepler et l'expression de GM obtenue précédemment :

$$\boxed{\tau = \frac{T}{2} = \frac{T_T}{2}\left(\frac{r_T + r_M}{2r_T}\right)^{3/2}.}$$

A.N. : $\tau = 0{,}709\,\text{an}$. En réalité le voyage est plus long

python Exercice 9 – Équation de Kepler

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import bisect

e = 0.5

# Question 1
def g(u):
    return u - e * np.sin(u)

u = np.linspace(-np.pi, np.pi)
plt.plot(u, g(u))
plt.grid()
plt.xlabel("$u$")
plt.ylabel("$g(u)$")

# Pour t = T/3, on cherche la valeur de u tq g(u) = 2 * pi / 3
plt.plot(u, np.ones(len(u))*2*np.pi/3, "--")
# Graphiquement, on lit u = 2.4

# Question 2
# On peut choisir u+ = 2,3 et u- = 2,5.

# Question 3
a, b = 2.3, 2.5
def f(u):
    return g(u) - 2*np.pi/3
u0 = bisect(f, a, b)
print("Solution de l'équation de Kepler (bisect) :", u0)
# Affiche 2.4234054584740083

# Question 4
precision = 2e-12
while (b-a) > precision:
    c = a + (b-a)/2
    if f(a)*f(c) > 0:
        a = c
    else:
        b = c
```

```python
print("Solution de l’équation de Kepler (dichotomie) :", c)
# Affiche 2.4234054584740075

print ("Écart entre les deux valeurs :", np.abs(u0 - c))
# Affiche 8.881784197001252e-16
# Les deux méthodes donnent le même résultat
# avec au moins la précision demandée.
```