

TD T3 – Deuxième principe

Correction

Exercice 1 – Contact thermique entre deux solides

1. On applique le premier principe au système formé par les deux solide, qui subit une transformation isochore et adiabatique. On a

$$\Delta U = 0.$$

Par additivité de l'énergie interne, on a

$$\Delta U = C_1(T_f - T_1) + C_2(T_f - T_2),$$

d'où

$$T_f = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2}.$$

2. Le deuxième principe appliqué au même système s'écrit, pour une transformation adiabatique,

$$\Delta S = \cancel{S_e} + S_c.$$

En utilisant l'additivité de l'entropie, on a

$$S_c = C_1 \ln \left(\frac{T_f}{T_1} \right) + C_2 \ln \left(\frac{T_f}{T_2} \right).$$

A.N. : $S_c = 52,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Exercice 2 – Mise à l'équilibre de deux gaz

1. À l'état final :

- la condition d'équilibre thermique impose $T_1 = T_2$. Par application du premier principe au système formé des gaz des deux compartiments qui subit une transformation adiabatique et isochore et en utilisant l'additivité de l'énergie interne, on a

$$T_1 = T_2 = T_0.$$

- la condition d'équilibre mécanique impose $P_1 = P_2$. En appliquant la loi des GP à l'ensemble des gaz contenus dans les deux compartiments, de volume $2V_0$ et de quantité de matière $3n_0 = 3 \frac{P_0 V_0}{RT_0}$, on trouve

$$P_1 = P_2 = \frac{3}{2} P_0.$$

- Les volumes des deux compartiments se déduisent de la loi des GP appliquée à chacun des deux gaz,

$$V_2 = 2V_1 = \frac{4}{3}V_0.$$

2. En appliquant le deuxième principe au gaz des deux compartiments qui subit une transformation adiabatique, on a $S_c = \Delta S$. Par additivité de l'entropie, en veillant à tenir compte du fait que l'enceinte 2 contient deux fois plus de gaz que la 1, on a

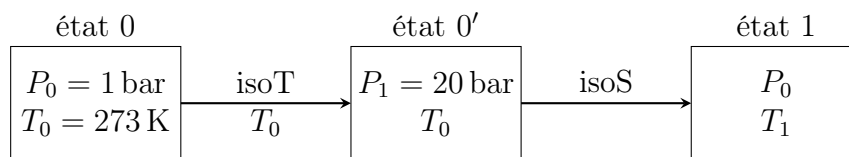
$$S_c = \Delta S = -n_0 R \ln\left(\frac{3}{2}\right) - 2n_0 R \ln\left(\frac{3}{4}\right), \quad \text{avec encore } n_0 = \frac{P_0 V_0}{RT_0},$$

d'où

$$S_c = \frac{P_0 V_0}{T_0} \ln \frac{32}{27} > 0.$$

Exercice 3 – Cryogénie

1. On commence par schématiser la transformation décrite dans l'énoncé.



La transformation $0' \rightarrow 1$ subie par le gaz parfait est adiabatique réversible. D'après la loi de Laplace, on a

$$PV^\gamma = \text{cste}, \quad \text{soit } P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cste},$$

d'où

$$T_1 = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

A.N. : $T_1 = 116 \text{ K}$.

2. De même, on a

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{2\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)}, \quad \text{puis } T_3 = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{3\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)},$$

d'où

$$T_n = r^n T_0, \quad \text{avec } r = \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)}.$$

A.N. : $T_{10} = 52 \text{ mK}$.

3. Les transformations isothermes doivent être réalisées en présence d'un thermostat à la température T_n , ce qui devient difficile à obtenir aux basses températures.

Exercice 4 – Bilan entropique

1. Le gaz (GP) du compartiment 2 subit une évolution adiabatique réversible, d'où, en appliquant la loi de Laplace

$$P_2 = P_f \quad V_2 = V_0 \left(\frac{P_0}{P_f} \right)^{1/\gamma} \quad T_2 = T_0 \left(\frac{P_0}{P_f} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1}.$$

Le volume du compartiment 1 se déduit de la conservation du volume total et sa température s'obtient avec la loi de GP :

$$P_1 = P_f \quad V_1 = 2V_0 - V_0 \left(\frac{P_0}{P_f} \right)^{1/\gamma} \quad T_2 = T_0 \left(2 \frac{P_f}{P_0} - \left(\frac{P_f}{P_0} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right).$$

2. En appliquant le premier principe au gaz des deux compartiments, on a

$$W_{\text{elec}} = \frac{P_0 V_0}{RT_0} C_{v,m} ((T_1 - T_0) + (T_2 - T_0)).$$

3. L'évolution du gaz de l'enceinte 2 est adiabatique et réversible d'où $\Delta S_2 = 0$. Finalement, par extensivité de l'entropie :

$$\Delta S = \Delta S_1 = n C_{v,m} \ln \frac{T_1}{T_0} + n R \ln \frac{V_2}{V_0}, \quad \text{où } n = \frac{P_0 V_0}{RT}.$$

Exercice 5 – Compression d'un gaz parfait

Corrigé en classe.

Exercice 6 – Détente de Joule – Gay-Lussac quasi-statique

1. La transformation subie par le GP est la suivante :

$$(P_0, T_0, V_0) \xrightarrow{\text{adiabatique}} (P_1, T_1, V_1), \quad \text{avec } V_1 = V_0(1+x).$$

La transformation détente se fait dans le vide, donc le travail des forces pressantes est nul. D'après le premier principe appliqué au gaz, on a donc

$$\Delta U = \mathcal{W} + \mathcal{Q} = 0.$$

La première loi de Joule implique donc

$$\boxed{T_1 = T_0.}$$

2. Connaissant la température et le volume du gaz avant et après la détente, on utilise $S(T, V)$ pour calculer la variation d'entropie lors de la transformation :

$$\Delta S = nR \ln(1+x).$$

La transformation est adiabatique donc $S_{\text{éch}} = 0$. L'entropie créée lors de la transformation se déduit du second principe :

$$\boxed{S_c = \Delta S - \cancel{S_{\text{éch}}} = nR \ln(1+x).}$$

3. Un DL au premier ordre non nul donne

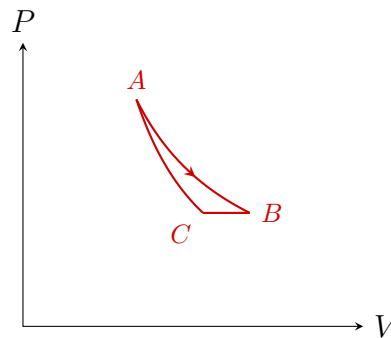
$$S_{c,DL1} \approx nRx.$$

En découpant la transformation de Joule – Gay-Lussac en un grand nombre N de petites étapes, où le volume augmente à chaque fois de V_0/N , la création d'entropie lors de chaque étape vaut donc nR/N . La création d'entropie totale vaut donc $N \times nR/N = nR > 0$ et **la transformation reste irréversible**.

Au contraire de la compression progressive d'un gaz étudiée dans l'Ex. 5, la détente de Joule – Gay-Lussac ne peut être rendue réversible par sur succession de transformations quasi-statiques.

Exercice 7 – Possibilité d'un cycle

1. Dans le diagramme de Watt, un isoS est plus raide qu'une isoT, d'où l'allure suivante :



2. Le cycle est parcouru dans le sens horaire, il s'agit d'un **cycle moteur** et $W < 0$.
 3. Pour la transformation isotherme $A \rightarrow B$, on a $PV = \text{cste}$, d'où

$$V_B = 2V_A.$$

Le travail reçu par le gaz s'écrit

$$W_{AB} = -nRT_0 \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) = -nRT_0 \ln 2.$$

D'autre part, d'après la première loi de Joule implique $\Delta U = 0$, d'où en appliquant le premier principe

$$W_{AB} = -Q_{AB}.$$

La variation d'entropie se calcule par exemple avec $S(T, P)$. On obtient

$$\Delta S_{AB} = -nR \ln \frac{1}{2} = nR \ln 2.$$

En appliquant le deuxième principe, on obtient finalement

$$\boxed{S_{c,AB} = \Delta S_{AB} - \frac{Q_{AB}}{T_0} = 0.}$$

La transformation $A \rightarrow B$ est donc **réversible**.

4. D'après la loi de Laplace pour la transformation CA adiabatique et réversible du GP,

$$T_C = T_A 2^{\frac{1}{\gamma}-1}.$$

A.N. : $T_C = 246 \text{ K}$. (On retrouve le même résultat en appliquant la loi de GP avec le volume V_C donné dans l'énoncé.)

La transformation $B \rightarrow C$ est isobare, d'où

$$W_{BC} = -P_B(V_C - V_B).$$

A.N. : $W_{BC} = 440 \text{ J}$.

En appliquant le premier principe pour une transformation isobare

$$Q_{BC} = \Delta H = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} (T_C - T_B).$$

A.N. : $Q_{BC} = -1,55 \text{ kJ}$.

On a

$$S_{\text{éch},BC} = \frac{Q_{BC}}{T_0}.$$

A.N. : $S_{\text{éch},BC} = -5,17 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Avec $S(T, P)$, on a aussi

$$\Delta S_{BC} = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} \ln \frac{T_C}{T_B},$$

et en appliquant le deuxième principe,

$$S_{c,BC} = \Delta S_{BC} - S_{\text{éch},BC}.$$

A.N. $S_{c,BC} = -0,54 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} < 0$, ce qui est **impossible** !

Le cycle n'est donc pas réalisable (cf. Chap. T5 : impossibilité d'un moteur monotherme) mais le cycle inverse l'est car on aurait alors $S_{c,CB} = 0,54 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > 0$.

Exercice 8 – Résistance thermique

1. On a

$$[R_{\text{th}}] = \Theta \cdot \text{P}^{-1} = \Theta \cdot \text{T}^3 \cdot \text{L}^{-2} \cdot \text{M}^{-1}.$$

La résistance thermique s'exprime souvent en $\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$.

2. En régime stationnaire, l'entropie est constante, d'où $\Delta S = 0$.
3. En régime stationnaire et pendant une durée Δt , le barreau reçoit du thermostat 1 un transfert thermique $Q_1 = \mathcal{P}_{\text{th}} \Delta t$. Le même transfert thermique est *cédé* au thermostat 2 durant le même intervalle de temps sans quoi l'énergie interne du barreau varierait. Le transfert thermique *reçu* par le barreau du thermostat 2 est donc $Q_2 = -Q_1$.

L'entropie reçue par le barreau est donc

$$S_{\text{éch}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{th}} \Delta t}{T_1} - \frac{\mathcal{P}_{\text{th}} \Delta t}{T_2}, \quad \text{d'où} \quad \sigma_{\text{éch}} = \mathcal{P}_{\text{th}} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = -\frac{(T_1 - T_2)^2}{R_{\text{th}}}.$$

4. Par application du deuxième principe au barreau :

$$\sigma_c = -\sigma_{\text{éch}} = \frac{(T_1 - T_2)^2}{R_{\text{th}}}.$$

L'entropie créée est transmise au thermostat le plus froid lors du transfert thermique.

5. σ_c est nécessairement positif, donc

$$R_{\text{th}} > 0.$$

Exercice 9 – Entrée de matière dans un récipient

1. On considère le système fermé constitué de l'air qui entre dans le récipient, qui subit la transformation

$$(T_0, P_0, V_0) \xrightarrow{Q=0} (T_1, P_1, V_1).$$

La pression finale est la même que la pression initiale car il doit y avoir équilibre mécanique.

Le travail W reçu par le gaz vaut

$$W = P_0 V_0.$$

En effet il s'agit du travail exercé par le gaz extérieur lors de la transformation, où le volume balayé vaut V_0 . Le transfert thermique Q reçu est nul car la transformation est adiabatique.

Le premier principe appliqué au gaz donne

$$\frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_0) = P_0 V_0 \stackrel{\text{GP}}{=} nRT_0.$$

On en déduit après calcul

$$T_1 = \gamma T_0.$$

2. En utilisant $S(T, P)$, on obtient

$$\Delta S = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln \gamma.$$

Le second principe appliqué au système donne finalement

$$S_c = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln \gamma,$$

car la transformation est adiabatique donc l'entropie échangée est nulle. On remarque que $S_c > 0$: la transformation est **irréversible**, en raison de la différence de pression entre le gaz et l'intérieur du récipient à l'état initial.