

TD M7 – Mouvement d'un solide

Correction

Exercice 1 – Échauffements

1. Le mouvement de l'extrémité des pâles de l'éolienne est circulaire de rayon $R = 50$ m et uniforme à la vitesse angulaire $\Omega = 14$ tr/min $= 2\pi \times 14/60 = 1,5$ rad/s, d'où

$$v = R\Omega.$$

A.N. : $v = 73 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 2,6 \times 10^2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

2. On a

$$\mathcal{P} = \Gamma\Omega, \quad \text{d'où} \quad \Gamma = \mathcal{P}/\Omega.$$

A.N. : $\Gamma = 3,0 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

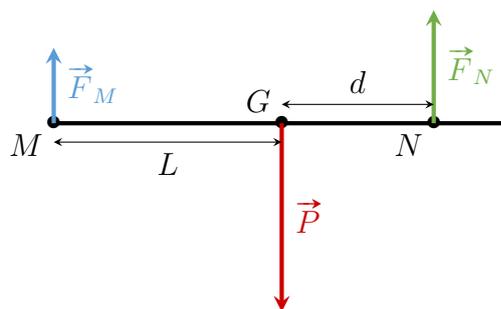
3. L'énergie cinétique d'un solide en rotation est donnée par

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J\Omega^2 = \frac{2\pi^2 J}{T^2}.$$

A.N. : $\mathcal{E}_c = 2,6 \times 10^{29} \text{ J}$.

Exercice 2 – Portage d'une poutre

1. Les forces exercées par les deux personnages sont a priori différentes. On peut par exemple prendre le cas limite, où $d = 0$: le personnage en N portera toute la poutre alors que le personnage en M ne portera rien.



2. On applique le TMC à la poutre par rapport au point G . Le moment du poids en G est nul, et les moments des forces exercées par les porteurs sont de sens opposé. Dans le référentiel terrestre considéré galiléen, la poutre est immobile, on a donc

$$0 = dF_N - LF_M.$$

D'autre part, le PFS appliqué au centre de masse de la poutre impose $\vec{P} + \vec{F}_N + \vec{F}_M = \vec{0}$, soit

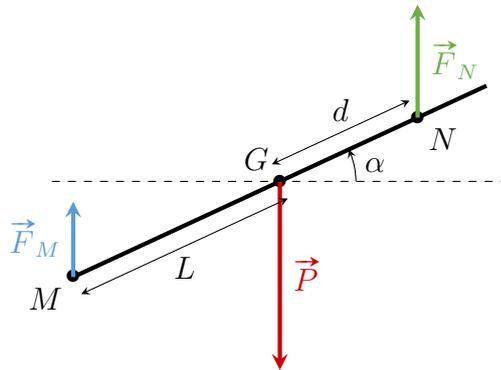
$$F_N + F_M - mg = 0.$$

On obtient un système de deux équations à deux inconnues dont la résolution conduit à

$$\boxed{F_M = \frac{mgd}{L+d}} \quad \text{et} \quad \boxed{F_N = \frac{mgL}{L+d}}$$

Ces résultats sont conforme à l'intuition que l'on peut avoir sur la situation. En particulier, $F_M \leq F_N$ et $F_M = 0$ si $d = 0$.

3. En considérant le même cas limite que précédemment, on se convainc que les forces sont a priori différentes.



4. Le PFS donne la même relation que précédemment. Le TMC donne lui

$$0 = d \cos \alpha F_N - L \cos \alpha F_M,$$

ce qui, en simplifiant par $\cos \alpha$ donne finalement la même relation que précédemment.

Les résultats sont inchangés quand la poutre est inclinée.

Exercice 3 – Démarrage d'une machine tournante

On pose :

- $\Omega = 50\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ la pulsation nominale du moteur ;
- $J = 12,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ le moment d'inertie du rotor ;
- $\Gamma_m = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$ le couple moteur ;
- $\Gamma_f = 4 \text{ N} \cdot \text{m}$ le couple dû aux frottement constant.

Dans tout l'exercice, on note θ , $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ les position, vitesse et accélération angulaires du rotor.

1. On applique le TMCS au {rotor} par rapport à son axe, fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On obtient

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{\Gamma_m - \Gamma_f}{J}}$$

A.N. : $\ddot{\theta} = 2,88 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$.

2. L'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ est constante, d'où immédiatement

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Omega}{\ddot{\theta}} = \frac{J\Omega}{\Gamma_m - \Gamma_f}}$$

A.N. : $\Delta t = 54,5 \text{ s}$.

3. On applique à nouveau le TMC au rotor en tenant compte de la force de frottement visqueux :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J}\dot{\theta} = \frac{\Gamma_m - \Gamma_f}{J}.$$

4. En régime permanent, la vitesse angulaire est constante, donc l'accélération angulaire est nulle et l'équation différentielle devient

$$\frac{\alpha}{J}\Omega = \frac{\Gamma_m - \Gamma_f}{J}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\alpha = \frac{\Gamma_m - \Gamma_f}{\Omega}}.$$

A.N. : $\alpha = 0,229 \text{ J} \cdot \text{s}$.

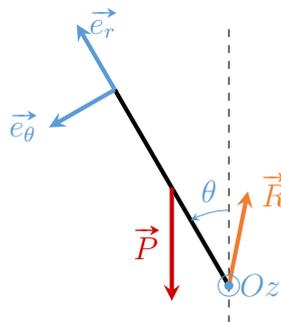
5. On résout l'équation différentielle, avec $\dot{\theta}(0) = 0$:

$$\boxed{\omega(t) = \dot{\theta}(t) = \Omega_l (1 - e^{-t/\tau}), \quad \text{où} \quad \tau = \frac{J}{\alpha} \quad \text{et} \quad \Omega_l = \frac{\Gamma_m - \Gamma_f}{\alpha}}.$$

Le temps nécessaire pour atteindre 99 % de la valeur limite vaut environ $4,6\tau = 251 \text{ s}$.

Exercice 4 – Chute d'un arbre

1. Le tronc est soumis à son poids et à la réaction de la liaison pivot.



Il est important de faire le schéma avec θ dans le sens direct défini par \vec{e}_z , sous peine de commettre des erreurs de signe dans la suite.

2. On applique le TMC au {tronc} par rapport au point O , fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On obtient

$$\boxed{\ddot{\theta} - \frac{3g}{2\ell} \sin \theta = 0.}$$

3. En multipliant par $\dot{\theta}$ des deux côtés, on peut intégrer l'équation du mouvement. La constante d'intégration s'obtient en utilisant les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, d'où

$$\boxed{\omega(\theta) = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{\ell}(\cos \theta_0 - \cos \theta)}}.$$

4. Par définition $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$. En séparant les variables,

$$\sqrt{\frac{3g}{\ell}} dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}.$$

5. On intègre sur la chute complète, en veillant à bien choisir les bornes d'intégration :
- au début de la chute ($t = 0$), la position angulaire du tronc vaut θ_0 ;
 - à la fin de la chute ($t = \tau$), la position angulaire vaut $\theta = \pi/2$.

On a donc

$$\int_0^\tau \sqrt{\frac{3g}{\ell}} dt = \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}, \quad \text{soit} \quad \sqrt{\frac{3g}{\ell}} \tau = 5,1.$$

Finalement

$$\tau = 5,1 \sqrt{\frac{\ell}{3g}}.$$

A.N. : $\tau = 5,1$ s.

6. Le centre de masse G du tronc à un mouvement circulaire de rayon $\ell/2$, donc

$$\vec{OG} = \frac{\ell}{2} \vec{e}_r, \quad \vec{v} = \frac{\ell}{2} \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{\ell}{2} (\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - \dot{\theta}^2 \vec{e}_r).$$

Dans la base cylindrique, le poids et la réaction de la liaison pivot s'écrivent

$$\vec{P} = mg (-\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \quad \text{et} \quad \vec{R} = R_r \vec{e}_r + R_\theta \vec{e}_\theta.$$

Les projection du PFD appliqué au centre de masse du tronc s'écrivent

$$\begin{cases} -\frac{m\ell}{2} \dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + R_r \\ \frac{m\ell}{2} \ddot{\theta} = mg \sin \theta + R_\theta. \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} R_r = m \left(-\frac{\ell}{2} \dot{\theta}^2 + g \cos \theta \right) \\ R_\theta = m \left(\frac{\ell}{2} \ddot{\theta} - g \sin \theta \right). \end{cases}$$

En injectant les expressions de $\ddot{\theta}$ et $\dot{\theta}$ obtenue grâce au TMC et à son intégration, on obtient finalement

$$\begin{cases} R_r = \frac{mg}{2} (5 \cos \theta - 3 \cos \theta_0) \\ R_\theta = -\frac{mg}{4} \sin \theta. \end{cases}$$

Exercice 5 – Œuf en rotation

1. En position horizontale, le centre de masse de l'œuf est à une altitude 0 choisie comme référence d'énergie potentielle, donc son énergie potentielle de pesanteur vaut

$$\mathcal{E}_{p,h} = 0$$

et son moment d'inertie vaut J_2 , donc son énergie cinétique vaut

$$\mathcal{E}_{c,h} = \frac{1}{2} J_2 \Omega^2.$$

Son énergie mécanique s'écrit donc

$$\mathcal{E}_h = m \frac{b^2 + a^2}{10} \Omega^2.$$

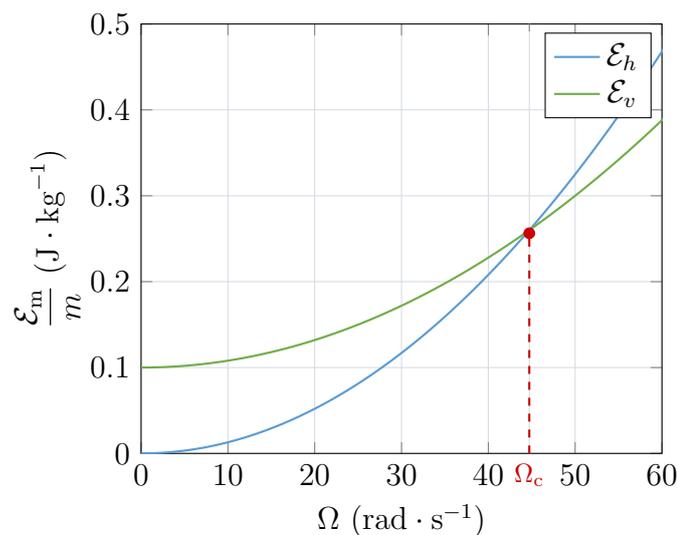
En position verticale, le centre de masse est à une distance a du sol, donc à une altitude $z = a - b$ et son moment cinétique vaut J_1 , d'où

$$\mathcal{E}_v = m \frac{b^2}{5} \Omega^2 + mg(a - b).$$

2. La vitesse angulaire critique Ω_c est telle que $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_v$, soit

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{10g}{a+b}}.$$

A.N. : $\Omega_c = 44,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Elle correspond à l'intersection des courbes représentées ci-dessous.



Pour une vitesse angulaire fixée, le système adopte naturellement le niveau d'énergie minimale, ce qui permet d'expliquer pourquoi le phitop se redresse.

Exercice 6 – Étude d'une poulie

1. La longueur AM vaut $cste + R\theta$. On en déduit immédiatement

$$\dot{x} = R\dot{\theta}.$$

2. On traduit la condition d'équilibre de la poulie en appliquant à la {poulie} le TMC par rapport à l'axe (Oz) fixe dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La somme des moments des forces appliquées à la poulie (la tension du fil en A et celle de l'opérateur en B) doivent donc se compenser.

La tension du fil s'obtient en appliquant le PFD à la {masse} immobile dans le référentiel du laboratoire : $T = mg$. Pour une corde sans masse, la force exercée par la corde sur la poulie en A est égale à $T\vec{e}_x$.

Pour se fatiguer le moins possible l'opérateur doit appliquer en B une force \vec{F} dirigée également selon \vec{e}_x . On en déduit

$$0 = -RF + Rmg, \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{F} = mg\vec{e}_x}.$$

3. On applique le PFD à la masse M soumise à son poids et à la tension du fil :

$$m\ddot{x} = mg - T.$$

Rq : La tension du fil n'est plus la même que précédemment car la masse accélère.

En appliquant le TMC à la poulie soumise à la tension du fil et à la réaction de la liaison idéale, on trouve

$$J\ddot{\theta} = RT.$$

Avec $\ddot{x} = R\ddot{\theta}$, on obtient l'accélération angulaire en combinant les deux équations, soit

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{Rmg}{J + mR^2}}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{x} = R\ddot{\theta}} \quad \text{et} \quad \boxed{T = \frac{J\ddot{\theta}}{R}}.$$

A.N. : $\ddot{\theta} = 91 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\ddot{x} = 9,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $T = 4,5 \text{ N}$.

Exercice 7 – Enseigne de saloon

1. On considère le système formé de {enseigne + balle} dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen. Le système n'est soumis qu'au poids. Entre les instants précédant et suivant immédiatement l'impact, la balle et l'enseigne sont à la verticale sous l'axe de rotation de l'enseigne, fixe dans \mathcal{R} : le moment des poids est donc nul. Le TMC implique donc la conservation du moment cinétique du système au moment de l'impact.

Immédiatement avant l'impact, le moment cinétique du système se ramène à celui de la balle car l'enseigne est immobile, d'où

$$L_z^- = \frac{m h v_0}{2}.$$

Immédiatement après l'impact, le moment cinétique du système est celui de l'enseigne car la masse de la balle, donc son moment cinétique, est négligeable devant celle de l'enseigne, d'où

$$L_z^+ \approx \frac{Mh^2\omega_0}{3}.$$

La conservation du moment cinétique impose donc

$$\omega_0 \approx \frac{3m}{2Mh}v_0.$$

A.N. : $\omega_0 = 3,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. En négligeant les frottements (de l'air et de la liaison pivot), après le choc, le mouvement de l'enseigne est conservatif. En particulier, l'énergie mécanique juste après le choc est égale à celle au « sommet » de la trajectoire correspondant à $\theta = \theta_m$. Toujours en négligeant la masse de la balle devant celle de l'enseigne,

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}J\omega_0^2 + 0 = 0 + Mgh\frac{h}{2}(1 - \cos\theta_m), \quad \text{d'où} \quad \cos\theta_m = 1 - \frac{J\omega_0^2}{Mgh} = 1 - \frac{h}{3g}\omega_0^2.$$

A.N. : $\theta_m = 32^\circ$.

3. On applique le TEM entre les instants précédant et suivant immédiatement l'impact, où seule l'énergie cinétique varie. On en déduit, avec W le travail des forces non-conservatives qui s'exercent au moment de l'impact entre l'enseigne et la balle.

$$W \approx \frac{1}{2}J\omega_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

A.N. : $W = -6,7 \times 10^2 \text{ J}$. On remarque $W < 0$: le système a perdu de l'énergie : dissipée sous forme de d'énergie thermique et dans la déformation de la balle. L'approximation vient là encore du fait qu'on néglige, après le choc, l'énergie cinétique de la balle devant celle de l'enseigne.

Exercice 11 – Méthode des rectangles

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import quad
4
5 theta0 = 5 * np.pi/180
6 def f(theta):
7     return 1 / np.sqrt(np.cos(theta0) - np.cos(theta))
8
9 def rectangle_gauche(f, a, b, n):
10    x = np.linspace(a, b-(b-a)/n, n)
11    return (b-a) / n * np.sum(f(x))
12 def rectangle_milieu(f, a, b, n):
13    x = np.linspace(a, b-(b-a)/n, n) + (b-a)/n/2

```

```
14     return (b-a) / n * np.sum(f(x))
15
16 # La méthode des rectangles à gauche ne fonctionne pas ici
17 # car la fonction f tend vers l'infini en theta0
18 print(rectangle_milieu(f, theta0, np.pi/2, 1000000))
19 # Le résultat est proche de celui donné avec la fonction quad
20 I_quad = quad(f, theta0, np.pi/2)[0]
21 print(I_quad)
22
23 n = [ 2**k for k in range(20) ]
24 I = [ rectangle_milieu(f, theta0, np.pi/2, k) for k in n ]
25 plt.semilogx(n, I, "o", label="rectangle au milieu")
26 plt.semilogx(n, np.ones(len(n)) * I_quad, "--", label="quad")
27 plt.xlabel("$n$")
28 plt.ylabel("Valeur de l'intégrale")
29 plt.legend()
30 plt.grid()
31 plt.show()
```