TD24 : Parcours de graphes

(Exercices empruntés à JB Bianquis.)

Exercice 1 Un graphe non orienté est *fortement orientable* s'il existe une orientation de ses arêtes qui le rende fortement connexe.
Un graphe non orienté connexe est dit *2-arête connexe*, ou *sans pont*, s'il n'existe pas d'arête dont la suppression déconnecterait le graphe (si une telle arête existe, elle est appelée *pont*).

1. Montrer qu'une arête est un pont ssi elle ne fait pas partie d'un cycle.
2. Soit un sommet r de G et un arbre couvrant de G obtenu à partir d'un parcours en profondeur de G :
   - on oriente les arêtes de cet arbre de la racine vers les feuilles ;
   - on oriente les autres arêtes des feuilles vers la racine.

   Montrer que si G est sans pont, alors cette orientation ren G fortement connexe.
3. En déduire le théorème de Robbins (1939) : un graphe est fortement orientable ssi il est sans pont.

Exercice 2 Soit un graphe orienté $G = (S, A)$. On veut savoir s'il et fortement connexe.

1. Proposer un algorithme naïf répondant à la question et déterminer sa complexité.
2. On note $G^{\leftarrow} = (S, A^{\leftarrow})$ le graphe obtenu en inversant le sens des arcs de G, soit :

   $$A^{\leftarrow} = \{(t, s) \mid (s, t) \in A\}.$$

   Proposer un algorithme répondant à la question qui utilise un parcours de G et un parcours de $G^{\leftarrow}$. Justifier sa correction.
3. Déterminer sa complexité.