Chapitre AD – Analyse dimensionnelle

Plan du cours

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

→ Contrôler l'homogénéité d'une expression, notamment par référence à des expressions connues.
→ Déterminer les exposants d'une expression de type monôme $E = A^\alpha B^\beta C^\gamma$ par analyse dimensionnelle.

Questions de cours

→ Indiquer les sept dimensions et unités du système international (nom et symbole).
→ Déterminer la dimension et l'unité d'une grandeur à partir d'une expression simple.
→ Vérifier l'homogénéité d'une relation simple.

Documents

Document 1 – Le Système international

Dimension		Unité S.I.		Constante associée
Temps	T	seconde	s	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}} = 9\,192\,631\,770\,\mathrm{Hz}$: fréquence de la transition hyperfine du césium 133.
Longueur	L	mètre	m	$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$: vitesse de la lumière dans le vide, *seconde*.
Masse	M	kilogramme	kg	$h = 6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$: constante de Planck, *mètre, seconde*.
Intensité électrique	I	ampère	A	$e = 1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$: charge élémentaire, *seconde*.
Température	Θ	kelvin	K	$k = 1{,}380\,649 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$: constante de Boltzmann, *kilogramme, mètre, seconde*.
Quantité de matière	N	mole	mol	$N_{\mathrm{A}} = 6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$: nombre d'Avogadro.
Intensité lumineuse	J	candela	cd	$K_{\mathrm{cd}} = 683\,\mathrm{lm\cdot W^{-1}}$: efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \times 10^{12}\,\mathrm{Hz}$, *kilogramme, mètre, seconde*.

Table 1 – Les dimensions et unités des sept grandeurs de base du système international.

La neuvième édition de la brochure sur le SI, accessible sur bipm.org/fr, précise les modifications adoptées lors de la redéfinition du système international d'unité votée en 2018 lors de la 26ème Conférence générale des poids et mesures. Ces nouvelles définitions sont en vigueur depuis 2019.

Document 2 – Nécessité de la redéfinition des unités

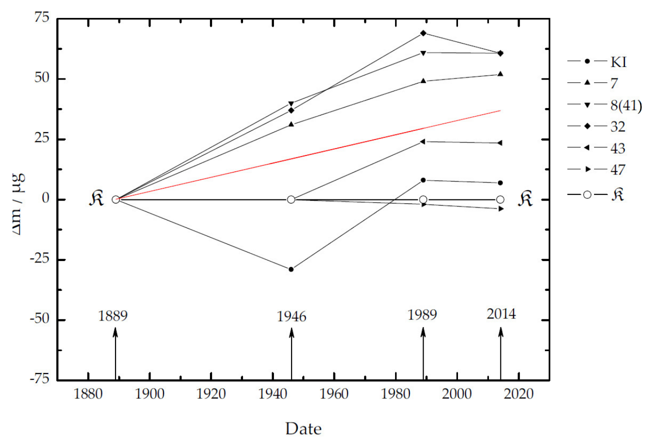

Figure 1 – À gauche : l'un des étalons en platine iridié, protégé sous deux cloches en verre, qui servait jusqu'en 2019 à définir le kilogramme. À droite : évolutions de l'écart de masse des six témoins officiels à la masse du prototype international du kilogramme (Thomas M. *et al.*). L'ajustement linéaire représenté en rouge donne une pente de l'ordre de 0,25 µg par an.

Document 3 – Préfixes

10^n	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^0	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}
Préfixe	téra	giga	méga	kilo	unité	milli	micro	nano	pico	femto
Symbole	T	G	M	k		m	µ	n	p	f

Table 2 – Préfixes couramment utilisés, à connaitre et savoir manipuler.

Des préfixes sont parfois introduits pour satisfaire aux besoins d'exprimer couramment de très petites ou très grandes valeurs. Ce fut le cas récemment, en novembre 2022 avec quatre nouveaux préfixes : quetta (10^{30}), ronna (10^{27}), ronto (10^{-27}) et quecto (10^{-30}).

Document 4 – Dimensions de quelques grandeurs courantes

Dimension		**Unité**		**S.I.**	**Formule utile**
Charge	$\mathrm{T \cdot I}$	coulomb	C	$\mathrm{s \cdot A}$	$i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$
Capacité	$\mathrm{M^{-1} \cdot L^{-2} \cdot T^4 \cdot I^2}$	farad	F	$\mathrm{kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^4 \cdot A^2}$	$\mathcal{E} = \dfrac{1}{2}Cu^2$
Inductance	$\mathrm{M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot I^{-2}}$	henry	H	$\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}}$	$\mathcal{E} = \dfrac{1}{2}Li^2$
Fréquence	$\mathrm{T^{-1}}$	hertz	Hz	$\mathrm{s^{-1}}$	$f = \dfrac{1}{T}$
Énergie	$\mathrm{M \cdot L^2 \cdot T^{-2}}$	joule	J	$\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}$	$\mathcal{E} = \dfrac{1}{2}mv^2$
Force	$\mathrm{M \cdot L \cdot T^{-2}}$	newton	N	$\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$	$m\vec{a} = \vec{F}$
Résistance	$\mathrm{M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot I^{-2}}$	ohm	Ω	$\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}}$	$\mathcal{P} = Ri^2$
Pression	$\mathrm{M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}}$	pascal	Pa	$\mathrm{kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}}$	$P = \dfrac{F}{s}$
Tension	$\mathrm{M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot I^{-1}}$	volt	V	$\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}}$	$\mathcal{P} = ui$
Puissance	$\mathrm{M \cdot L^2 \cdot T^{-3}}$	watt	W	$\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}}$	$\mathcal{P} = \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ ou $\vec{F} \cdot \vec{v}$

Table 3 – Expressions des unités SI associées à quelques grandeurs couramment utilisées. La dernière colonne propose quelques exemples de formules qui seront vues pendant l'année et qui permettent de les retrouver rapidement.

1 Dimensions et unités

1.1 Définitions

Définition

Une **grandeur physique** G est une propriété d'un système que l'on peut exprimer quantitativement sous la forme d'un **nombre** (la valeur numérique) et d'une **référence** (l'unité).

Exemple : *La longueur d'une tige, la vitesse d'une voiture, son énergie cinétique, etc.*

Définition

La **dimension** $[G]$ de la grandeur G correspond à la nature physique de ce qu'elle décrit.

Exemple : *La hauteur d'un immeuble et la distance qui vous sépare du lycée sont des grandeurs physiques qui ont la dimension d'une longueur.*

Définition

L'**unité** est la référence qui permet d'exprimer la valeur numérique d'une grandeur.

Exemple : *Dans le système international, une longueur s'exprime en mètre (m).*

Application 1 – Le pendule simple

Un pendule simple est formé d'un fil rigide à l'extrémité duquel est suspendue une masselotte. L'autre extrémité du fil est attachée à un point fixe, de sorte que la masselote peut osciller librement. On souhaite étudier le comportement de ce pendule simple.

1. Faire un schéma du dispositif.
2. Établir la liste de toutes les grandeurs physiques permettant de décrire ce système.
3. Dans un tableau, indiquer la dimension et l'unité de chacune de ces grandeurs.

On utilisera toujours les **sept unités de base** du **système international** (cf. Doc. 1), ou des unités dérivées du SI (Ω, W, J, etc.). La nouvelle définition de ces unités est entrée en vigueur en 2019 (cf. Doc. 2).

Pour alléger l'écriture d'un résultat, on peut avoir recours à l'écriture scientifique et/ou à l'utilisation de préfixes (cf. Doc. 3).

1.2 Déterminer la dimension d'une grandeur

Propriété 1

Une grandeur G peut être de dimension 1, notée $[G] = 1$. On parle souvent de grandeur sans dimension, ou de grandeur **adimensionnée**.

Exemple : *Le quotient de deux grandeurs homogènes est adimensionné, comme le rapport d'aspect d'un écran* $l/h = 1920/1080 = 16/9$.

La dimension de n'importe quelle grandeur physique peut s'exprimer en fonction des dimensions de base.

Propriété 2

On ne peut sommer ou soustraire que des grandeurs ayant la même dimension. La dimension d'une **somme** de plusieurs grandeurs est la même que celle de chacune des grandeurs sommées.

Exemple : *La masse* m_{tot} *d'un étudiant s'exprime* $m_{tot} = m_{corps} + m_{vêt} + m_{sac}$, *avec* $[m_{tot}] = [m_{corps}] = [m_{vêt}] = [m_{sac}] = \mathrm{M}$.

Propriété 3

La dimension du **produit** (resp. du **quotient**) de deux grandeurs est le produit (resp. le quotient) des dimensions de ces grandeurs.

Application 2 – Détermination de la dimension d'une grandeur

Déterminer la dimension de chacune des grandeurs suivantes en fonction des dimensions canoniques. En déduire l'unité SI de ces grandeurs.

1. La fréquence f d'un signal périodique de période T.
2. La vitesse moyenne v_{moy} d'un train qui parcourt une distance d pendant une durée Δt.
3. La vitesse instantanée $v(t)$ de ce même train dont la distance parcourue par rapport à son point de départ à l'instant $t = 0$ est donnée par son abscisse $x(t)$.
4. L'accélération instantanée $a(t)$ de ce même train.

Définition

Quand deux grandeurs ont la même dimension, on dit qu'elles sont **homogènes**.

Application 3 – Le joule

1. Rappeler l'expression de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_{\mathrm{c}}$ d'une voiture de masse m allant à la vitesse v.
2. Exprimer la dimension E de l'énergie $\mathcal{E}_{\mathrm{c}}$ en fonction des dimensions de base.
3. En déduire l'expression du joule J en fonction, des unités de bases.
4. Montrer que le produit mgh est homogène à une énergie, où g est l'accélération de la pesanteur et h l'altitude de la voiture.
5. Retrouver l'expression des dimensions du Doc. 4 en fonction des dimensions de base.

2 Utiliser l'analyse dimensionnelle

2.1 Vérifier une équation

L'**analyse dimensionnelle** permet de vérifier qu'il n'y a pas d'erreur évidente dans une équation.

Propriété 4

Une équation est **homogène** si :

- les termes d'une somme sont homogènes ;
- les deux membres d'une égalité sont homogènes ;
- les fonctions mathématiques (cos, sin, exp, log, ln, etc.) ont pour argument une grandeur sans dimension.

Une équation non homogène est forcément fausse.

Exemple : *A priori, on peut écrire* $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ *car on a vu que les deux termes de l'égalité avaient la dimension d'une énergie, la relation est donc homogène.*

Application 4 – Période du pendule simple

On note g l'accélération de la pesanteur et ℓ la longueur du fil du pendule. Parmi les formules ci-dessous, identifier celle qui donne la période T des oscillations du pendule simple. Justifier.

$$T = 2\pi\sqrt{\ell g} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\ell g}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Test de vraisemblance

Après chaque calcul et **avant** toute application numérique, il faudra **systématiquement vérifier la cohérence de l'expression littérale obtenue, notamment par analyse dimensionnelle** !

Rq : L'analyse dimensionnelle ne permet pas de vérifier que les coefficients sans dimension sont corrects. De plus, il est toujours possible de multiplier une grandeur par un quotient de deux grandeurs homogènes sans changer sa dimension. Si une expression non homogène est forcément fausse, une expression homogène n'est pas nécessairement juste.

2.2 Un moyen mnémotechnique

Quand on sait qu'il existe un lien simple entre quelques grandeurs, l'analyse dimensionnelle permet de retrouver la bonne relation.

Application 5 – Vitesse, longueur d'onde et fréquence

On considère une onde sonore de fréquence f qui se propage à la vitesse v dans un milieu donné. On note λ sa longueur d'onde.

1. Rappeler les dimensions de ces trois grandeurs.
2. Par analyse dimensionnelle, retrouver l'expression de la longueur d'onde λ en fonction de f et v.

2.3 Estimer un résultat

Cet aspect sera abordé en TD (TD0, Ex. 5) et éventuellement en cours d'année.