TD AD – Analyse dimensionnelle

Pour tous les exercices du TD, on pourra s'appuyer sur le tableau du Doc. 4 du Chap. AD pour un rappel de l'expression de la dimension d'une grandeur en fonction des dimensions de base. À terme, il faudra être capable de les retrouver seul.

★☆☆ Exercice 1 – Conversions

1. Exprimer, en utilisant la notation scientifique :

- **1.a.** la fréquence du rayonnement d'un four à microonde $f = 2{,}45\,\mathrm{MHz}$ en hertz.
- **1.b.** la longueur d'onde d'un pointeur laser vert $\lambda = 532\,\mathrm{nm}$ en mètre.
- **1.c.** un an en secondes.

2. Exprimer :

- **2.a.** la surface du feuille A4 en centimètre carré, puis en mètre carré.
- **2.b.** le volume d'une bouteille d'eau de $1{,}5\,\mathrm{L}$ en décimètre cube, puis en mètre cube.

3. Convertir :

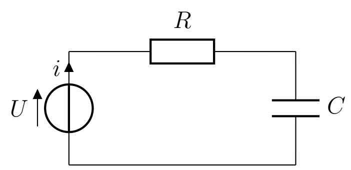
- **3.a.** la vitesse maximale autorisée sur autoroute $130\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ en mètre par seconde.
- **3.b.** la concentration massique en sel de la mer Méditerranée $c = 40\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{L}^{-1}$ en kilogramme par mètre cube.

★☆☆ Exercice 2 – Charge d'un condensateur

Un générateur de tension est utilisé pour charger à l'aide d'une tension U un condensateur de capacité C à travers une résistance R.

La charge électrique $q(t)$ du condensateur, initialement déchargé, s'exprime

$$q(t) = CU\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$



1. Déterminer et justifier la dimension du paramètre τ.

2. Le paramètre τ est lié à R et C. Parmi les équations ci-dessous, déterminer celle qui est correcte. Justifier.

- $\tau = RC$
- $\tau = R/C$
- $\tau = (RC)^{-1}$
- $\tau = C/R$

★★☆ Exercice 3 – Gaz parfaits

Dans des conditions normales de température et pression, l'air peut être assimilé à un gaz parfait. Pour une quantité de matière n d'air contenue dans un récipient de volume V, la pression P et la température T du gaz sont alors reliées par l'équation des gaz parfaits

$$PV = nRT,$$

où R est la constante des gaz parfaits.

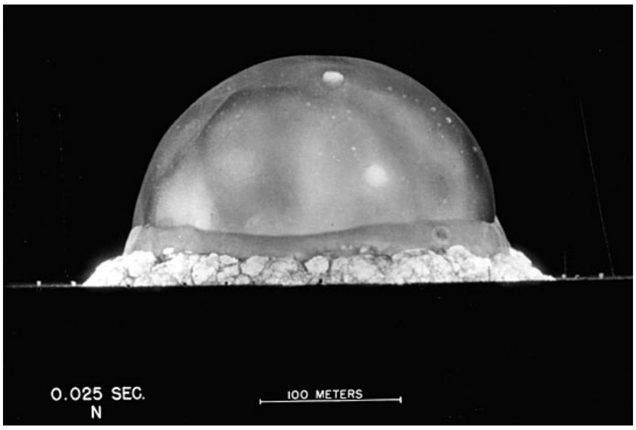
Retrouver l'unité SI de la constante des gaz parfaits.

★★☆ Exercice 4 – Homogénéité

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer si les équations sont homogènes. Si ce n'est pas le cas, proposer une expression corrigée homogène, en faisant éventuellement intervenir une grandeur supplémentaire pertinente.

1. L'évolution temporelle de l'altitude $z(t)$ d'un corps de masse m et de vitesse initiale v_0, soumis à l'accélération de pesanteur g :
$$z(t) = v_0 t^2 + \frac{1}{2} g t.$$
2. La troisième loi de Kepler pour une planète en orbite circulaire de rayon R et de période T, autour du Soleil de masse $M_\odot$:
$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G M_\odot}.$$
Donnée : constante gravitationnelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.
3. La position $x(t)$ d'un proton de masse m, de charge électrique e et de vitesse initiale v_0 que l'on accélère entre les deux armatures d'un condensateur, séparées par une distance d, aux bornes duquel on applique une tension U :
$$x(t) = \frac{eUt^2}{2d} + v_0 t.$$

★★★ Exercice 5 – Trinity



La première explosion d'une bombe atomique remonte au 16 juillet 1945 avec l'essai baptisé « Trinity ». Si l'énergie de la bombe restera classée secret-défense, le gouvernement américain divulgua les photos de l'explosion après la fin de la guerre en 1947.

À partir de ces photos, le physicien Geoffrey Taylor publia un article en 1950 dans lequel il propose une estimation de l'énergie libérée lors de l'explosion, équivalente à 16 800 tonnes de TNT.

On considère que le rayon $r(t)$ de l'explosion ne dépend que de l'énergie $\mathcal{E}$ de la bombe, de la masse volumique de l'air $\rho = 1{,}25\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et du temps t écoulé depuis l'explosion.

1. Rappeler l'expression de la dimension de chacune des quatre grandeurs impliquées en fonction des dimensions de base.
2. On admet que l'énergie peut s'écrire sous la forme $\mathcal{E} = k \times r^\alpha \times t^\beta \times \rho^\gamma$, où k est une constante sans dimension. Déterminer les valeurs des coefficients α, β et γ par analyse dimensionnelle. Donner l'expression de $r(t)$.
3. À l'aide des données expérimentales (Fig. 1) et en supposant que $k = 1$, estimer l'énergie $\mathcal{E}$ de la bombe en joules, puis en tonnes de TNT.
L'énergie libérée par l'explosion d'une tonne de TNT est de $4{,}2\,\mathrm{GJ}$.

La technique secrète des physiciens, ScienceEtonnante.

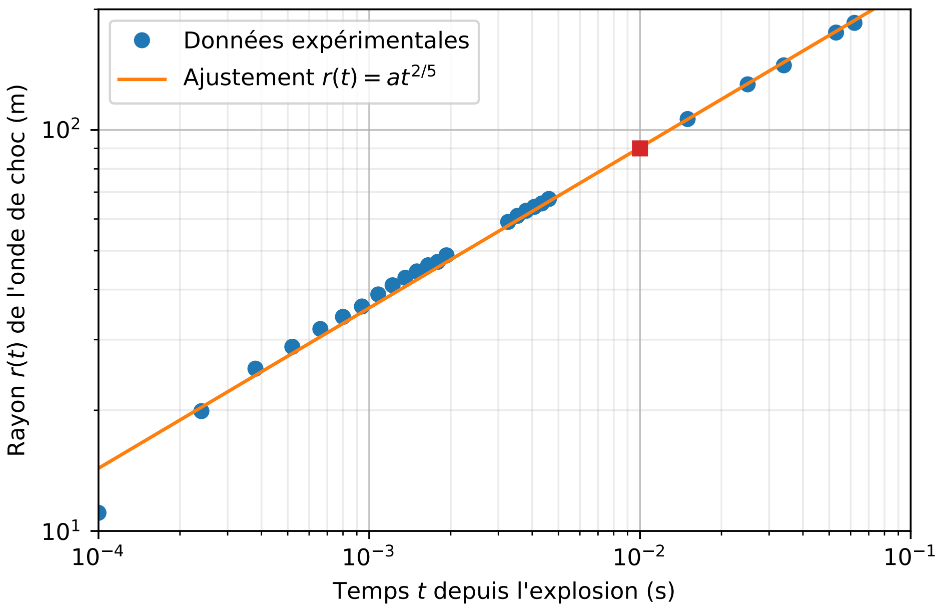


FIGURE 1 – Évolution du rayon de l'onde de choc dans les instants suivant l'explosion.

★★★ Exercice 6 – Frottement et pollution

On considère une voiture roulant à la vitesse v. On note ρ la masse volumique de l'air et S la surface avant de la voiture.

1. En admettant que la norme de la force de frottement F exercée par l'air sur la voiture ne dépend que de v, ρ et S, déterminer l'expression de F à une constante sans dimension près.
2. En déduire une expression possible de l'énergie $\mathcal{E}$ nécessaire pour parcourir une distance d à la vitesse v en raisonnant par analyse dimensionnelle.
3. Durant les pics de pollution, la vitesse maximale sur les autoroutes passe de $130\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ à $110\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Expliquer cette mesure à l'aide du résultat précédent.

Coups de pouce

Ex. 1 1. Utiliser un tableau de conversion si nécessaire. 2. Attention : $1\,\mathrm{cm^2} \neq 0{,}01\,\mathrm{m^2}$. 3. On peut y aller par étape : convertir en $\mathrm{m\cdot h^{-1}}$, puis en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Vérifier la cohérence du résultat : parcourt-on plus de distance en une heure ou en une seconde ?
Ex. 2 1. Que peut-on dire de la dimension de l'argument de la fonction exponentielle ?

Ex. 3 Poser l'équation aux dimensions et la résoudre.

Ex. 5 3. Attention, le graphe est échelle logarithmique : le carré rouge a par exemple pour coordonnées $(0{,}01\,\mathrm{s}, 90\,\mathrm{m})$.

✓ Éléments de correction

Ex. 2 1. $[\tau] = \mathrm{T}$; 2. $\tau = RC$.

Ex. 3 $\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-2}\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}} = \mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$.

Ex. 4 1. inhomogène, $z(t) = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$; 2. homogène ; 3. inhomogène, $x(t) = \frac{eUt^2}{2m_p d} + v_0 t$.

Ex. 5 2. $r(t) = \left(\frac{1}{k}\frac{\mathcal{E}}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}}$; 3. $\mathcal{E} \approx 18 \times 10^3$ tonnes de TNT.
Ex. 6 1. $F \propto \rho S v^2$; 2. $\mathcal{E} \propto \rho S v^2 d$.