Chapitre O2 – Formation des images

Plan du cours

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

→ Construire l'image d'un objet par un miroir plan.
→ Exploiter les propriétés du centre optique, des foyers principaux et secondaires, de la distance focale, de la vergence.
→ Construire l'image d'un objet situé à distance finie ou infinie à l'aide de rayons lumineux, identifier sa nature réelle ou virtuelle.
→ Exploiter les formules de conjugaison et de grandissement transversal de Descartes et de Newton.
→ Établir et utiliser la condition de formation de l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergente.
→ Modéliser l'œil comme l'association d'une lentille de vergence variable et d'un capteur plan fixe.
→ Citer les ordres de grandeur de la limite de résolution angulaire et de la plage d'accommodation.
→ Représenter le schéma d'une lunette afocale modélisée par deux lentilles minces convergentes ; identifier l'objectif et l'oculaire.
→ Représenter le faisceau émergent issu d'un point objet « à l'infini » traversant une lunette afocale.
→ Établir l'expression du grossissement d'une lunette afocale.
→ Exploiter les données caractéristiques d'une lunette commerciale.

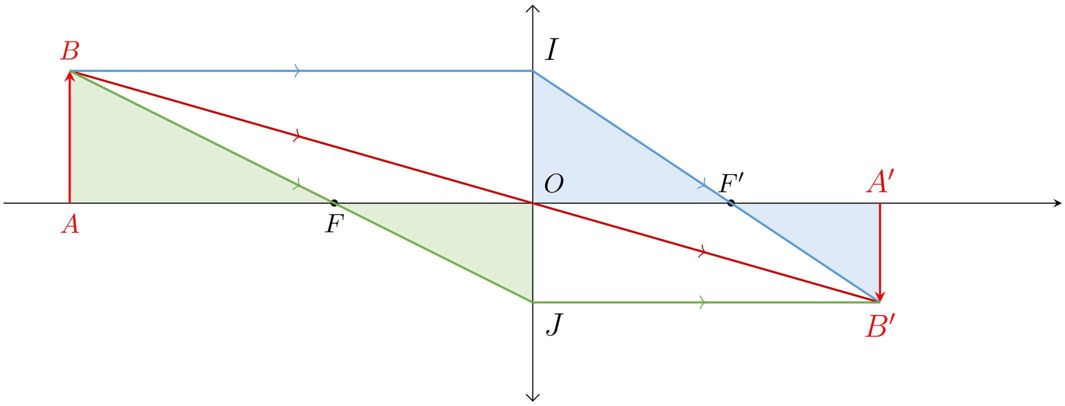
Questions de cours

→ Présenter le modèle d'une lentille mince : schéma, propriété du centre optique et des foyers.
→ Énoncer les relations de conjugaison et de grandissement avec origine au centre (de Descartes), schéma à l'appui.
→ Établir, schéma optique à l'appui, la condition de formation d'une l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergente (App. 9, sans le graphe).
→ Établir la condition sur la distance entre un objet réel et un écran permettant d'obtenir une image nette à l'aide d'une lentille convergente ($D \geqslant 4f'$).
→ Présenter le modèle simplifié de l'œil et donner ses limites (plage d'accommodation et limite de résolution) et App. 11.
→ Présenter le modèle de la lunette astronomique et établir l'expression du grossissement.
→ Représenter la marche des rayons à travers la lunette afocale (App. 12).

Documents

Document 1 – Démonstration des relations de conjugaison

Par soucis de simplicité, on choisit la configuration représentée ci-dessous, où une lentille convergente donne une image réelle d'un objet réel. Les démonstrations restent bien sûr valables dans les autres cas.



Relations de Descartes

En appliquant le théorème de Thalès aux triangles OAB et $OA'B'$, on démontre immédiatement la formule pour le grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

Par construction, on a $\overline{AB} = \overline{OI}$. Le grandissement s'exprime donc également :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}}.$$

En appliquant le théorème de Thalès aux triangles $F'OI$ et $F'A'B'$, on obtient :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{A'F'}}{\overline{OF'}},$$

d'où :

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'F'}}{\overline{OF'}} = \frac{\overline{A'O} + \overline{OF'}}{\overline{OF'}}.$$

En divisant par $\overline{OA'} = -\overline{A'O}$, on obtient finalement :

$$\frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OF'}} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}.$$

Relations de Newton

En appliquant le théorème de Thalès aux triangles $F'OI$ et $F'A'B'$ on démontre immédiatement la formule pour le grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}}.$$

Par construction, on a $\overline{A'B'} = \overline{OJ}$. Le grandissement s'exprime donc également :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OJ}}{\overline{AB}}.$$

En appliquant le théorème de Thalès aux triangle FOJ et FAB on obtient :

$$\frac{\overline{OJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}},$$

d'où :

$$\gamma = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}.$$

En réécrivant cette expression, on obtient finalement

$$\overline{F'A'}{\cdot}\overline{FA} = \overline{FO}{\cdot}\overline{F'O} \quad \text{soit} \quad \overline{F'A'}{\cdot}\overline{FA} = -f'^2.$$

Document 2 – L'œil

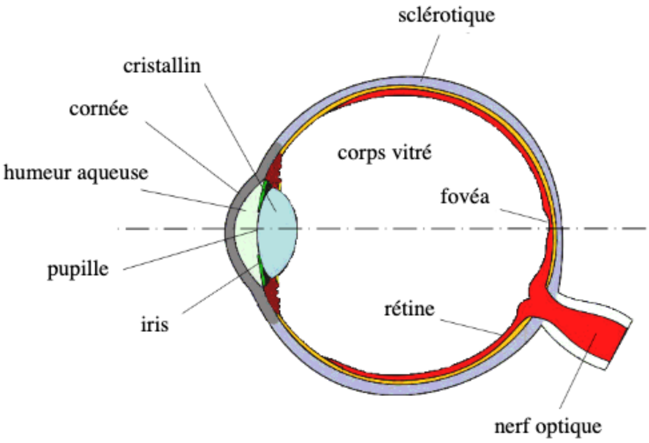


FIGURE 1 – Coupe de l'œil humain.

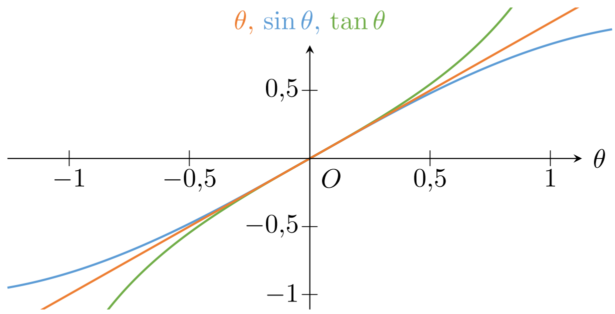
L'œil humain a sensiblement la forme d'une sphère (Fig. 1). Il est divisé en deux parties séparées par le cristallin, assimilé à une lentille mince biconvexe, convergente. Cette lentille est élastique et ses rayons de courbure varient lorsque l'œil accommode, c'est-à-dire quand il passe de la vision de loin à la vision de près.

L'iris joue le rôle d'un diaphragme et définit la pupille. Il permet de réguler la quantité de lumière qui arrive au niveau de la rétine.

La rétine sert de détecteur. Elle est recouverte de cellules photosensibles, les cônes et les bâtonnets, qui transforment l'excitation lumineuse en influx nerveux. La distance entre la rétine et le cristallin est invariable : $d = 17\,\text{mm}$.

L'œil normal (emmétrope) permet de voir nettement des objets situés devant lui depuis la distance $d_{\text{PP}} = 25\,\text{cm}$ jusqu'à la distance d_{PR} infinie. Si l'image se forme sur la rétine au niveau de la fovéa, l'œil peut distinguer deux points proches suffisamment contrastés si leur distance angulaire est supérieure $1'$ (une minute d'arc).

Document 3 – Approximation des petits angles



θ (°)	θ (rad)	$\sin\theta$	$\tan\theta$	$\cos\theta$
0	0	0	0	1
1	0,017	0,017	0,017	1,000
10	0,175	0,174	0,176	0,985
20	0,349	0,342	0,364	0,940
30	$\frac{\pi}{6} \approx 0{,}524$	0,500	0,577	0,866
40	0,698	0,643	0,839	0,766
45	$\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$	0,707	1,000	0,707

FIGURE 2 – Pour des angles faibles ($\theta \ll 1\,\text{rad}$), on peut linéariser les fonctions trigonométriques : $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1$. Pour $\theta < 10°$, l'approximation des petits angles conduit à une erreur de l'ordre de $1\,\%$. Pour $\theta < 30°$, l'erreur est de l'ordre de $10\,\%$.

1 Image d'un objet par un miroir plan

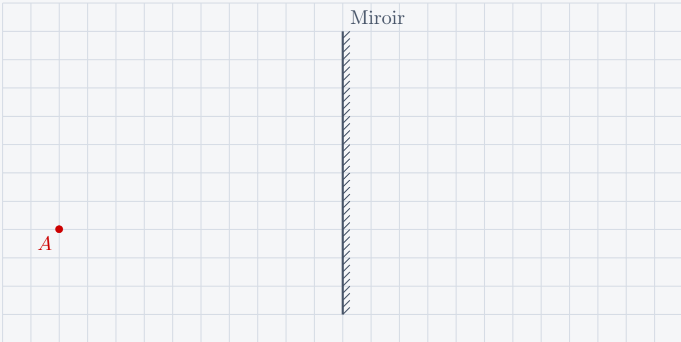
1.1 Miroir plan

Un miroir plan est un dioptre plan parfaitement réfléchissant : on ne s'intéresse qu'aux rayons réfléchis.

Application 1 – Réflexion sur un miroir plan

L'objet A représenté ci-dessous est une source lumineuse ponctuelle. Il est situé à proximité d'un miroir plan.

1. Représenter la marche de quelques rayons lumineux issus de A réfléchis par le miroir.
2. Pour un observateur situé du côté de A, d'où semblent provenir les rayons réfléchis ?



Rq : On représente toujours les **rayons lumineux en traits pleins**, et les **rayons fictifs en pointillés**.

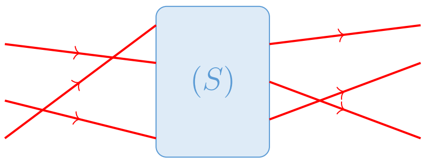
Propriété 1 (à démontrer)

Un miroir plan donne de tout objet une image **symétrique par rapport au plan du miroir**.

1.2 Vocabulaire

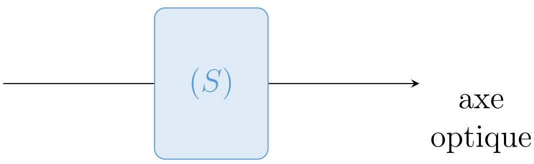
Définition

Un **système optique** (S) est un ensemble de dioptres susceptibles de modifier la trajectoire des rayons lumineux ou les propriétés de la lumière.



Définition

On dit qu'un système optique est **centré** si les éléments qui le constituent ont un axe de symétrie en commun appelé **axe optique**.



Exemple : *l'objectif d'un appareil photo, une lunette astronomique, etc.*

Définition

Un **objet** est un ensemble de points qui émettent de la lumière. On dit de l'objet qu'il est :

- **réel** s'il est situé **avant** le système optique ;
- **virtuel** sinon.

Exemple : *une étoile, une lampe, un arbre éclairé, etc.*

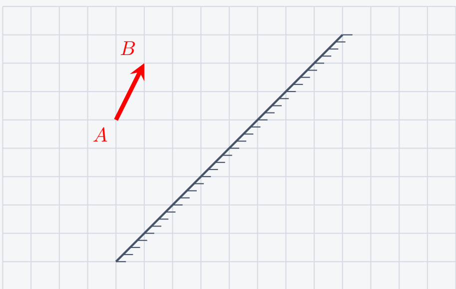
Définition

Une **image** est une région de l'espace où convergent les rayons lumineux issus de l'objet après être passés à travers le système optique. On dit de l'image qu'elle est :

- **réelle** si elle se forme **après** le système optique, c'est-à-dire s'il est possible de la projeter sur un écran ;
- **virtuelle** sinon.

Exemple : *image d'un paysage formée sur le capteur d'un appareil photo, etc.*

Application 2 – Miroir plan



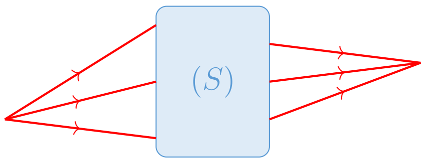
On s'intéresse à la formation de l'image d'un objet AB par un miroir plan.

1. Construire l'image $A'B'$ de l'objet AB.
2. Représenter deux rayons lumineux quelconques réfléchis par le miroir, l'un issu de A et l'autre issu de B.
3. Donner la nature de l'objet et celle de son image.

Définition

On dit d'un système optique qu'il est :

- **stigmatique** si l'image qu'il forme d'un point est un point ;



- **aplanétique** si l'image d'un objet perpendiculaire à l'axe optique l'est aussi.

Rq : Le miroir plan est le seul élément optique rigoureusement stigmatique pour tout point. Heureusement, certains éléments optiques sont stigmatiques pour certains points particuliers. D'autres doivent être utilisés dans des conditions particulières pour que l'on puisse obtenir un stigmatisme approché.

python Tracé de rayon pour un dioptre sphérique

`chap02-stigmatisme.py`

Comment déterminer la trajectoire d'un rayon lumineux incident parallèle à l'axe optique ? Pour un objet ponctuel situé très loin du dioptre, le système est-il stigmatique ? Peut-on améliorer le stigmatisme du système ?

Les systèmes optiques centrés courants réalisent un stigmatisme et un aplanétisme approché dans les **conditions de Gauss** tels que les rayons lumineux sont :

- peu inclinés par rapport à l'axe optique ;
- peu éloignés de l'axe optique.

On parle de rayons **paraxiaux**.

2 Lentilles minces

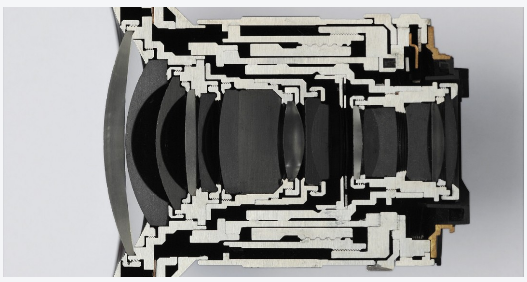
2.1 Description d'une lentille mince

Une lentille mince est un milieu transparent de faible épaisseur (faible devant les rayons de courbure), délimité par deux dioptres. C'est un **système optique centré**, que l'on supposera stigmatique et aplanétique (lorsqu'il est utilisé dans les conditions de Gauss). On distingue deux catégories de lentilles minces.

- les lentilles **convergentes** dont le centre est plus épais que les bords ;
- les lentilles **divergentes** dont le centre est plus mince que les bords.

Application 3 – Convergente ou divergente ?

Pour obtenir une image de qualité, un objectif photo est composé de nombreuses lentilles. Indiquer la nature (convergente ou divergente) de chacune des lentilles de l'objectif ci-contre. On traitera indépendamment les deux lentilles de chaque doublet.



Expérience 1 : Marche des rayons lumineux à travers une lentille

- lentilles didactiques ;
- source lumineuse.

Pour modéliser une lentille convergente ou divergente, on utilise le **modèle de la lentille mince**.

Définition

Une lentille possède trois points particuliers.

- le point O : c'est le **centre optique** de la lentille ;
- le point F : c'est le **foyer principal objet**. Un objet ponctuel situé en ce point donnera une image à l'infini ;
- le point F' : c'est le **foyer principal image**. Un objet ponctuel situé à l'infini aligné avec l'axe optique donnera une image en ce point.

python **Influence du rayon de courbure du dioptre sur la focale de la lentille**

`chap02-stigmatisme.py`

Où sont situés les foyers ? Quelle est l'influence du rayon de courbure de la lentille ?

Définition

Une lentille est caractérisée par sa **distance focale** $\overline{OF'}$ que l'on notera f'. C'est une distance algébrique :

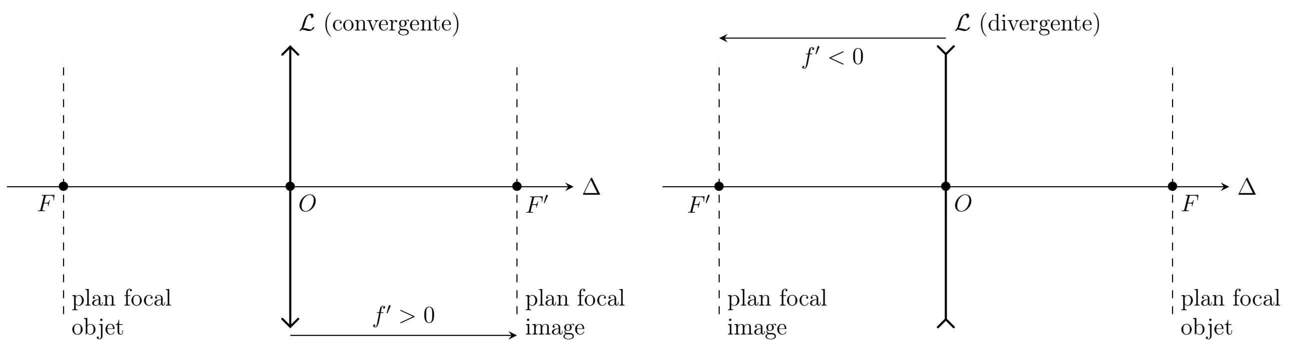
- $\overline{OF'} > 0$ pour une lentille convergente ;
- $\overline{OF'} < 0$ pour une lentille divergente.

On a toujours $\overline{OF} = -\overline{OF'}$: les foyers objet et image sont symétriques par rapport au centre optique.

Exemple : *pour caractériser un objectif d'appareil photo, on donne sa focale (équivalente).*

Définition

Le **plan focal objet** (resp. **image**) est le plan perpendiculaire à l'axe optique passant par le foyer principal objet (resp. image).
Tout point qui appartient au plan focal objet (resp. image) est appelé **foyer secondaire objet** (resp. **image**).



Définition

La **vergence** V d'une lentille, exprimée en dioptries (δ), est définie comme l'inverse de la focale :

$$V = \frac{1}{f'}.$$

Exemple : *la correction nécessaire à un œil est exprimée en dioptries : c'est la vergence des verres/lentilles à porter.*

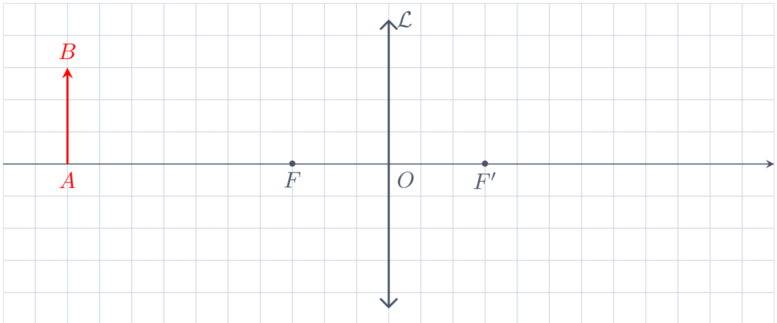
2.2 Construction de l'image d'un objet

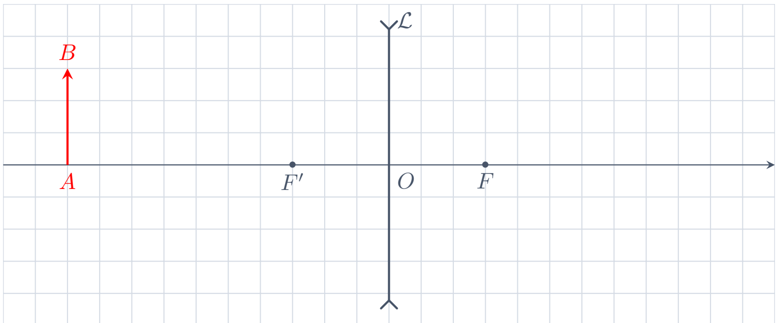
Propriété 2

Pour construire l'image d'un objet par une lentille, on peut utiliser trois rayons particuliers :

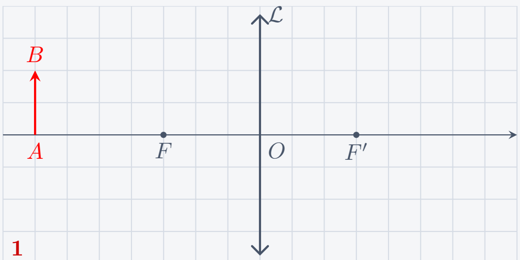
- un rayon passant par le centre optique n'est pas dévié ;
- un rayon incident parallèle à l'axe optique ressort en passant par le foyer principal image ;
- un rayon incident passant le foyer principal objet ressort parallèle à l'axe optique.

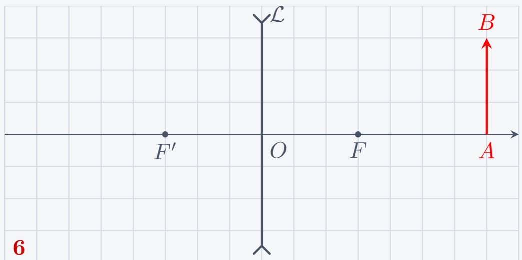
Exemple :

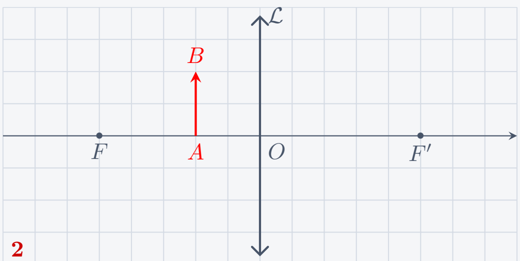


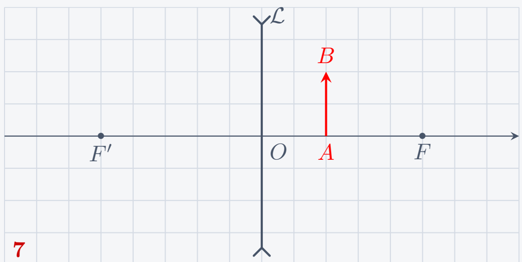


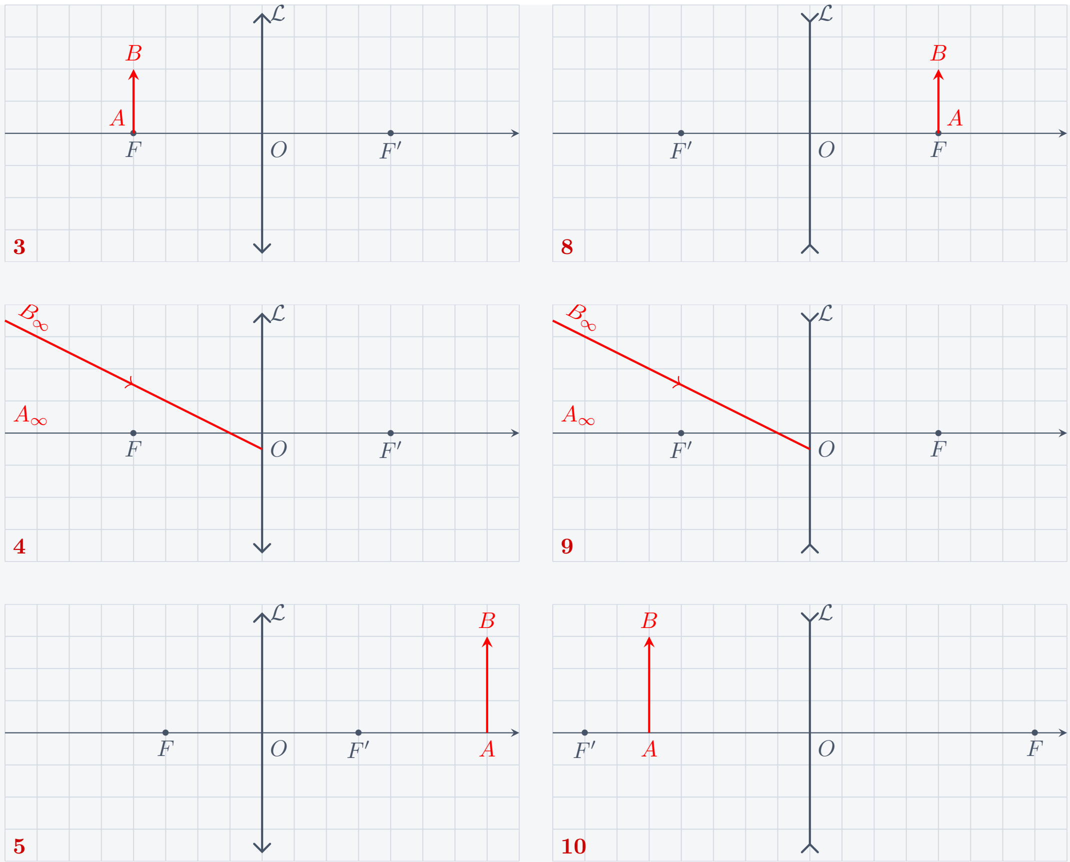
Application 4 – Construction d'une image par une lentille mince











Rq : En pratique, seuls deux de ces rayons suffisent, le troisième peut éventuellement servir de confirmation.

Propriété 3 (à démontrer)

Un objet situé à l'infini donne une image dans le **plan focal image** de la lentille.
Un objet situé dans le **plan focal objet** de la lentille donne une image à l'infini.

Définition

Pour une configuration donnée, on définit le **grandissement transversal** γ comme le rapport entre la taille algébrique de l'image et celle de l'objet :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

Le grandissement est une grandeur algébrique :

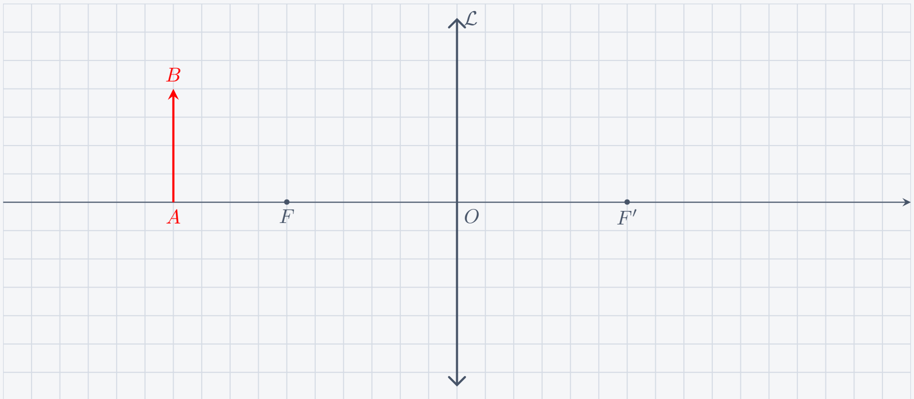
- si $\gamma < 0$, l'objet et l'image sont dans le même sens : on dit que l'image est **droite** ;
- si $\gamma > 0$, l'objet et l'image sont de sens opposés : on dit que l'image est **renversée**.

Par ailleurs, si :

- $|\gamma| > 1$, l'image est **agrandie** : elle est plus grande que l'objet ;
- $|\gamma| < 1$, l'image est **réduite**, elle est plus petite que l'objet.

Application 5 – Grandissement transversal

1. Construire l'image $A'B'$ de AB.
2. Caractériser l'image obtenue : réelle ou virtuelle, droite ou renversée, agrandie ou réduite ?
3. Exprimer, puis calculer le grandissement transversal γ.
4. Représenter la marche d'un rayon quelconque issu de A passant par la lentille.



Application 6 – Convergente ou divergente ? (bis)

Déduire des constructions 2 et 10 et/ou des constructions 4 et 9 de l'application 4 une ou plusieurs méthode(s) permettant d'identifier la nature d'une lentille mince.

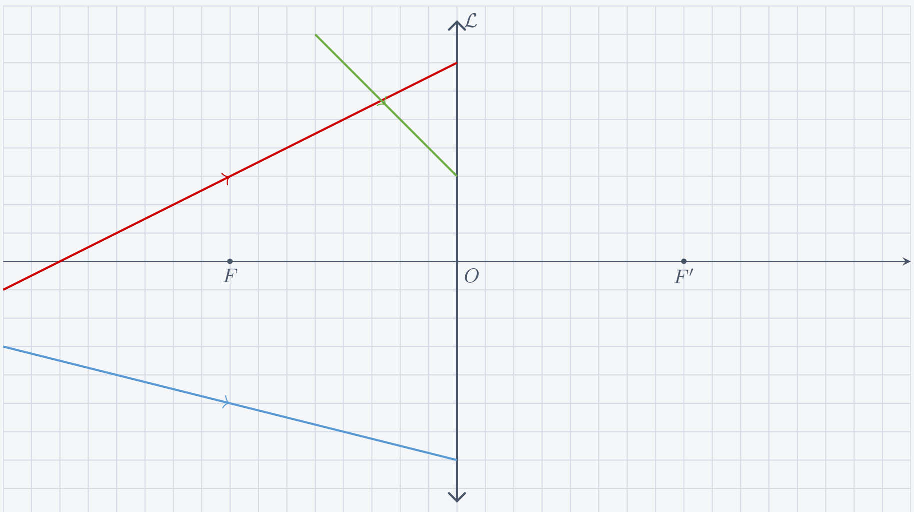
Expérience 2 : Convergente ou divergente ?

- quelques lentilles minces, convergentes et divergentes.

Identifier la nature de chacune des lentilles.

Application 7 – Tracé de rayon

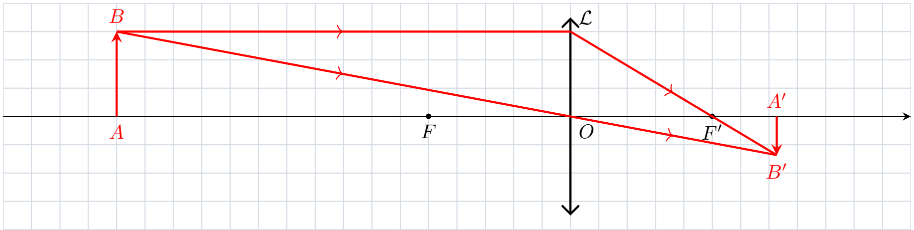
Représenter les rayons qui émergent de la lentille.



2.3 Relations de conjugaison

Les relations de conjugaison sont valables aussi bien pour les lentilles convergentes que divergentes (Doc. 1).

Soit $A'B'$ l'image de AB par une lentille $\mathcal{L}$ de distance focale f' : on dit que $A'B'$ et AB sont **conjugués** par $\mathcal{L}$.



Propriété 4

Les **relations de conjugaison de Descartes**, ou relations de conjugaison avec origine au centre optique s'écrivent :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O'A'}}{\overline{OA}}.$$

Propriété 5

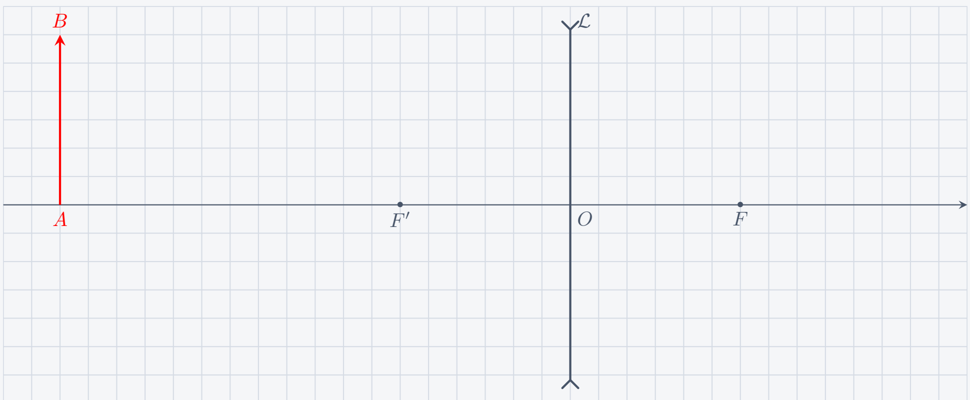
Les **relations de Newton**, ou relations de conjugaison avec origines aux foyers s'écrivent :

$$\overline{F'A'} \times \overline{FA} = -f'^2 \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}.$$

Application 8 – Relations de conjugaison

On s'intéresse à la formation de l'image $A'B'$ image d'un objet AB formée par une lentille de distance focale $f' = -3{,}0\,\text{cm}$ dans la situation représentée ci-dessous.

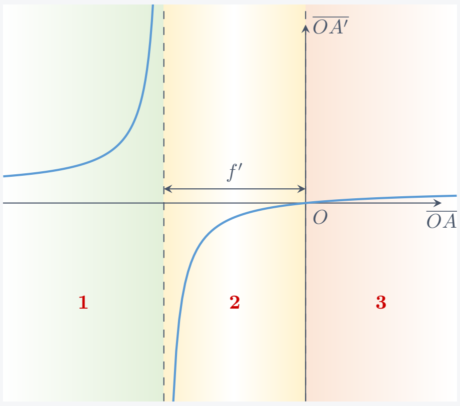
1. Exprimer, puis calculer les position et taille de l'image avec les relations de Descartes.
2. Faire de même en utilisant les relations de Newton.
3. Retrouver ces résultats en construisant l'image $A'B'$ de AB.



Condition d'obtention d'une image réelle

Application 9 – Condition de formation d'une image réelle

On réalise l'image d'un objet par une lentille de distance focale $f' > 0$. La figure ci-contre représente la distance algébrique $\overline{OA'}$ entre l'image et la lentille en fonction de la distance algébrique $\overline{OA}$ entre l'objet et la lentille.



1. Rappeler la condition sur $\overline{OA}$ pour laquelle l'objet est réel et celle sur $\overline{OA'}$ pour laquelle l'image est réelle.
2. Indiquer, pour chaque domaine, la nature de l'objet et celle de son image.
3. Établir la condition de formation d'une image réelle d'un objet réel en utilisant l'une des relations de conjugaison.

Propriété 6 (à démontrer)

Pour obtenir une image réelle avec une lentille convergente, l'objet doit être placé **avant le foyer objet**.

3 Exemples de systèmes optiques

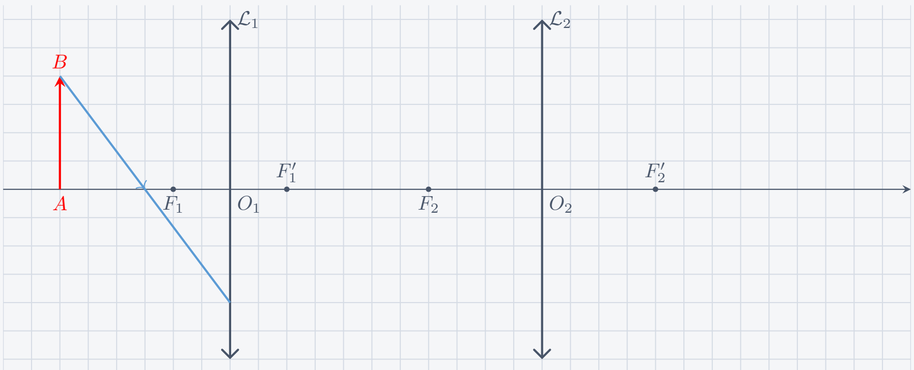
3.1 Système optique composé

Quand un système comporte plusieurs éléments, on construit l'**image intermédiaire** A_1B_1 formée par le premier élément, qui devient l'objet du deuxième, et ainsi de suite :

$$AB \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1B_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A_2B_2 \rightarrow ...$$

Application 10 – Système optique composé

1. Construire l'image A_2B_2 de AB produite par le système optique ci-dessous.
2. Caractériser l'image.
3. Représenter la marche du rayon représenté en bleu à travers le système.

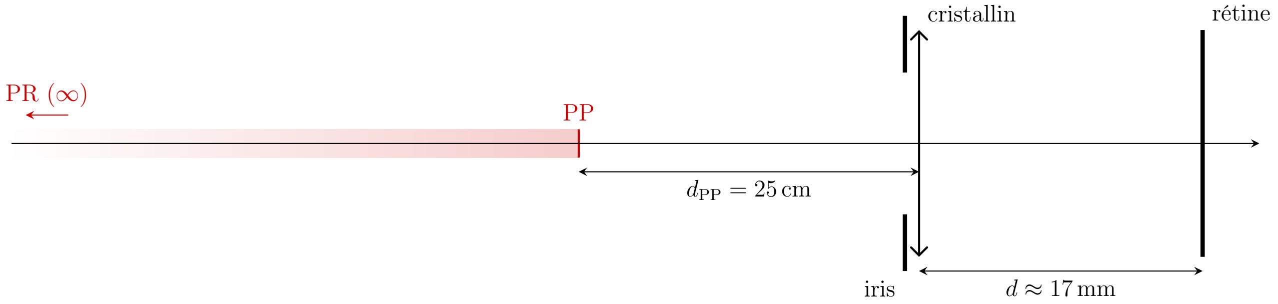


3.2 L'œil

L'œil (Doc. 2) peut être modélisé par l'association :

- d'un **diaphragme** : l'iris ;
- d'une **lentille mince convergente** : le cristallin ;
- d'un **capteur plan fixe** : la rétine.

Le cristallin est déformable : sa focale peut être modifiée pour former des images nettes d'objets situés à différentes distances sur la rétine située à une distance fixe du cristallin. On dit que l'œil **accommode**.



Définition

Le **punctum remotum** (PR) est le **point le plus éloigné** dont l'œil est capable de produire une image nette. Pour un l'œil emmétrope (sain), il se situe à l'infini :

$$d_{\mathrm{PR}} = \infty.$$

Pour observer un objet au PR, l'œil n'accommode pas.

Pour observer un objet au PR, l'œil ne se fatigue donc pas : la plupart des instruments optiques destinés à une observation humaine (microscope, lunette astronomique, etc.) forment une image à l'infini pour que leur utilisation soit confortable.

Définition

Le **punctum proximum** (PP) est le **point le plus proche** dont l'œil est capable de produire une image nette. Pour un œil emmétrope, on retiendra :

$$d_{\mathrm{PP}} = 25\,\mathrm{cm}.$$

Le PP et le PR définissent la **plage d'accommodation** : c'est la plage de vision nette.

Définition

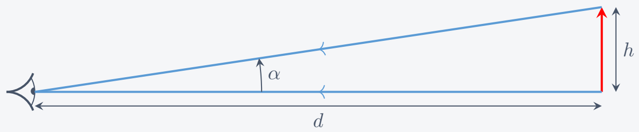
La **limite de résolution angulaire** est le plus petit angle ε sous lequel deux points peuvent être **résolus** (=distingués). Pour l'œil humain, cette limite est de l'ordre de $1'$:

$$\varepsilon = 1' = \frac{1^\circ}{60} = 3 \times 10^{-4}\,\mathrm{rad}$$

Rq : Pour des petits angles, il est possible de linéariser les fonctions trigonométriques (Doc. 3) : c'est l'**approximation des petits angles**.

Application 11 – Limite de résolution de l'œil

Déterminer la hauteur h du plus petit objet que l'œil peut distinguer à une distance $d = 25\,\text{cm}$, $5\,\text{m}$ et $100\,\text{m}$. Quel paramètre permet de caractériser la taille apparente d'un objet ?



Définition

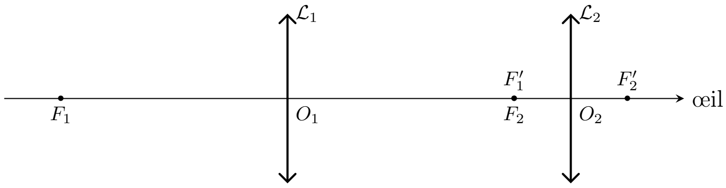
La **taille apparente**, ou **taille angulaire** ou **diamètre apparent** ou **diamètre angulaire** d'un objet correspond à l'angle sous lequel est vu un objet.

3.3 La lunette astronomique

Une lunette astronomique permet d'obtenir une image agrandie d'un objet situé à l'infini. Elle est constituée de **deux lentilles convergentes** :

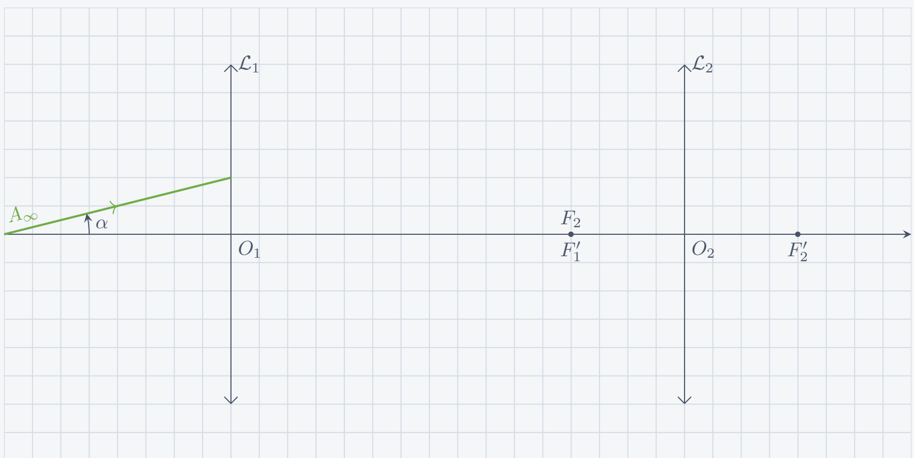
- un objectif $\mathcal{L}_1$ de grande distance focale f'_1 ;
- un oculaire $\mathcal{L}_2$ de faible distance focale $f'_2 < f'_1$.

Pour une observation confortable à l'œil nu, l'image est formée à l'infini : il s'agit d'un système **afocal**. Pour cela, le foyer image de l'objectif et le foyer objet de l'oculaire sont confondus ($F'_1 = F_2$).



Application 12 – Marche des rayons à travers la lunette

On observe un objet ponctuel A situé à l'infini à travers une lunette afocale d'objectif $\mathcal{L}_1$ et d'oculaire $\mathcal{L}_2$. Les rayons issus de A forment un angle α avec l'axe optique de la lunette.



1. Construire l'image de A par la lunette.

2. Représenter la marche du rayon vert, puis celle du faisceau issu de A délimité par les rayons passant par le bord de l'objectif.

Définition

Un système **afocal** est un système optique qui transforme un faisceau de lumière parallèle en un autre faisceau de lumière parallèle : il ne possède pas de foyer objet, ni de foyer image.

Définition

On définit le **grossissement** d'une lunette comme le rapport

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha},$$

où α est la taille angulaire (algébrique) de l'objet sans la lunette et α' celle de son image à travers la lunette.

Application 13 – Grossissement d'une lunette

La Lune, de rayon $r_L = 1740\,\text{km}$, a une orbite quasi-circulaire de rayon $R_L = 384\,400\,\text{km}$ autour de la Terre. On note α son diamètre apparent dans le ciel.

On l'observe avec une lunette astronomique dont les caractéristiques sont données ci-dessous. La distance focale de l'objectif est notée f_1', celle de l'oculaire est notée f_2'. Le diamètre angulaire de l'image de la Lune en sortie de la lunette est noté α'.

	Distance focale	**Diamètre**
Objectif $\mathcal{L}_1$	900 mm	70 mm
Oculaire $\mathcal{L}_2$	25 mm	7 mm

1. Faire un schéma et faire apparaitre les angles α et α'. *On prendra* $f_1' = 3f_2'$ *pour le schéma.*
2. Exprimer la taille de l'image intermédiaire A_1B_1 en fonction de α et f_1'.
3. Exprimer le diamètre apparent α' en fonction de A_1B_1 et f_2'.
4. En déduire l'expression du grossissement G de la lunette en fonction de f_1' et f_2'. Faire l'application numérique.
5. Exprimer α' en fonction de α, f_1' et f_2', puis en fonction de r_L, R_L, f_1' et f_2'. Faire l'application numérique.

Propriété 7 (à démontrer)

Le **grossissement** G **d'une lunette astronomique** s'exprime en fonction du rapport des distances focales f_1' et f_2' de l'objectif et de l'oculaire. Puisque l'image est agrandie et renversée, on a

$$G = -\frac{f_1'}{f_2'} < -1.$$