DM02 – Optique
Correction

Exercice 1 – Stigmatisme approché d'une lentille demi-boule

Étude théorique

1. L'angle d'incidence est nul en I pour un rayon parallèle à l'axe optique, il n'y a donc pas de déviation.
2. La troisième loi de Snell-Descartes en J s'écrit

$$\boxed{n \sin i = \sin r.}$$

3. On a directement, dans le triangle CHJ

$$\boxed{\overline{CH} = R\cos i} \quad \text{et} \quad \overline{HJ} = R\sin i.$$

D'autre part, dans le triangle HJK, l'angle $\widehat{HKJ}$ vaut $r - i$. On a donc

$$\overline{HK} = \frac{\overline{HJ}}{\tan(r-i)}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\overline{HK} = \frac{R\sin i}{\tan(r-i)}.}$$

4. On a

$$\begin{aligned}
\overline{CK} &= \overline{CH} + \overline{HK} \\
&= R\cos i + \frac{R\sin i}{\tan(r-i)} \\
&= R\left(\cos i + \sin i\frac{\cos(r-i)}{\sin(r-i)}\right) \\
&= R\left(\cos i + \sin i\frac{\cos r\cos i + \sin r\sin i}{\sin r\cos i - \sin i\cos r}\right) && \text{(formule d'addition)} \\
&= R\left(\frac{\cos i(\sin r\cos i - \sin i\cos r) + \sin i(\cos r\cos i + \sin r\sin i)}{\sin r\cos i - \sin i\cos r}\right) \\
&= R\left(\frac{\sin r\cos^2 i + \sin r\sin^2 i}{\sin r\cos i - \sin i\cos r}\right) \\
&= R\left(\frac{\sin r}{\sin r\cos i - \sin i\cos r}\right) && (\cos^2 i + \sin^2 i = 1) \\
&= \frac{nR}{n\cos i - \cos r} && \text{(Snell-Descartes et simplification par } \sin i)
\end{aligned}$$

Finalement, puisque tous les angles sont dans $[0, \pi/2]$, avec l'habituel $\cos r = \sqrt{1-\sin^2 r} = \sqrt{1 - n^2\sin^2 i}$, on obtient le résultat attendu,

$$\boxed{\overline{CK} = \frac{nR}{n\cos i - \sqrt{1-n^2\sin^2 i}}.}$$

Prise en main du programme

5. On lit à la ligne 8,

$$\boxed{n = 1{,}51.}$$

6. Puisque l'air est moins réfringent que la lentille, ils peut y avoir réflexion totale à la sortie de la lentille. Les rayons les plus éloignés de l'axe optique arrivent sur le dioptre sphérique avec une incidence importante, supérieure à l'angle limite de réfraction : il n'y a pas de réfraction pour ces rayons.

7. En procédant par essais et erreurs, on parvient à déterminer la valeur de h_{max} (ligne 9). On trouve

$$\boxed{h_{\text{max}} = 0{,}66\,\text{m}.}$$

Rq : le calcul donne

$$h_{\text{max}} = R \sin i_l = \frac{R}{n} \approx 0{,}662\,\text{m}.$$

8. On peut déterminer le rôle de la variable `N` en modifiant sa valeur et en observant les changements sur la figure après exécution du programme.
Pour `N = 6`, on observe six rayons lumineux. Pour `N = 10`, on en observe dix, etc. Cette variable fixe donc le **nombre de rayons incidents**.

Stigmatisme approché

9. Avec $h_{\text{max}} = 0{,}66\,\text{m}$ et $N = 10$, on remarque que les rayons qui émergent de la lentille ne se croisent pas tous en un même point bien qu'ils soient issus d'une source ponctuelle à l'infini. Le système n'est donc pas stigmatique.

10. En réduisant la valeur de h_{max}, il est possible de reproduire l'effet d'un diaphragme. On a alors simplement

$$\boxed{R_{\text{D}} = h_{\text{max}}.}$$

11. Le système semble stigmatique pour

$$\boxed{\eta \approx 0{,}25.}$$

Il faut alors zoomer sur la zone d'intersection des rayons lumineux pour voir qu'ils ne se coupent pas en un même point.

12. Le critère selon lequel le système parait stigmatique dépend du capteur utilisé pour observer l'image obtenue. Si l'on utilise un capteur CCD, la taille d de la tache obtenue pour l'image d'un objet ponctuel doit rester inférieure à la taille des pixels. Sur un capteur plein format $24\,\text{mm} \times 36\,\text{mm}$ de 24 mégapixels, la taille d'un pixel est $d_{\text{p}} = 6\,\mu\text{m}$. Si $d < d_{\text{p}}$, le système paraitra stigmatique.

13. Un diaphragme peu ouvert ne laisse passer que peu de lumière : l'**image sera peu lumineuse**. Par ailleurs, si le diamètre de l'ouverture devient comparable à la longueur d'onde du visible, la **diffraction** ne pourra plus être négligée : on sort du cadre de l'optique géométrique.

Conditions de Gauss

14. Un rayon peut être considéré proche de l'axe optique si sa distance à l'axe vérifie

$$h \ll R, \quad \text{ou encore} \quad \boxed{h \ll f'.}$$

avec f' la distance focale de la lentille.

Distance focale

15. On réduit encore l'ouverture du diaphragme pour plus de précision. Pour $\eta = 0{,}1$, le faisceau parallèle converge à une distance $1{,}94\,\mathrm{m}$ du sommet O de la lentille : c'est à cette distance que la tache lumineuse a le plus faible diamètre. On a donc

$$\boxed{f' = \overline{OK} \approx 1{,}94\,\mathrm{m}.}$$

16. Avec l'expression obtenue lors de l'étude théorique, on obtient

$$\overline{OK} = \overline{CK} - \overline{CO} = \frac{nR}{n\cos i - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}} - R.$$

On se limite à des rayons paraxiaux, de telle sorte que $i \ll 1$. On a alors

$$f' = \overline{OK} \approx \frac{nR}{n-1} - R \quad \text{soit} \quad \boxed{f' = \frac{R}{n-1}.}$$

A.N. : $f' = \overline{CK} = 1{,}96\,\mathrm{m}$.
Cette valeur est proche de la valeur obtenue avec la simulation. Pour comparer quantitativement les résultat, on peut estimer l'incertitude sur la mesure précédente. On estime $f' \in [1{,}93\,\mathrm{m}, 1{,}96\,\mathrm{m}]$, d'où $f' = (1{,}945 \pm 0{,}009)\,\mathrm{m}$. L'écart normalisé vaut $1{,}7 < 2$: les valeurs sont compatibles.

Règle des 4P

17. Pour $\eta \approx 0{,}4$, la « lentille inversée » semble donner une image ponctuelle : le système réalise alors un stigmatisme approché.

18. En plaçant le côté plat de la lentille du côté de l'image qui, dans cette situation est plus proche de la lentille que l'objet, on obtient un stigmatisme approché avec une ouverture plus importante que lorsqu'on retourne la lentille. Pour une ouverture fixée, c'est-à-dire un diamètre de lentille donné, l'image est de meilleure qualité en plaçant la face plane du côté de l'objet ou de l'image le plus proche de la lentille. Ceci illustre bien la règle des 4P.