Chapitre E2 – Circuits du premier ordre

Plan du cours

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

→ Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.
→ Déterminer en fonction du temps la tension aux bornes d'un condensateur dans le cas de sa charge et de sa décharge.
→ Réaliser un bilan énergétique sur le circuit RC série.
→ Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant dans un circuit RL.
→ Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.
→ Réaliser un bilan énergétique sur le circuit RL série.

Questions de cours

→ Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur, ou par l'intensité du courant traversant une bobine.
→ Résoudre ces équations le cas d'une charge ou d'une décharge.
→ Justifier par un raisonnement énergétique la continuité de la tension aux bornes du condensateur, de l'intensité du courant traversant une bobine.
→ Donner la valeur du temps caractéristique du régime transitoire pour un circuit RC ou un circuit RL.
→ Réaliser un bilan énergétique sur le circuit RC ou le circuit RL.

Plutôt que des questions de cours, il s'agit ici davantage de méthodes qu'il faut être capable de mettre en œuvre rapidement. Inutile d'apprendre par cœur les résultats, sauf les expressions des temps caractéristiques qui, elles, sont à connaitre par cœur.

Documents

Document 1 – Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (EDL1)

On s'intéresse à la résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, vérifiée par $x(t)$, de la forme :

$$x + \tau\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X_1, \qquad \text{ou, écrite sous sa forme canonique,} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{x}{\tau} = \frac{X_1}{\tau}, \tag{1}$$

où τ et X_1 sont des constantes. Si X_0 est la valeur de $x(t)$ pour $t = 0$, on cherche l'unique solution qui vérifie la condition initiale $x(0) = X_0$, c'est-à-dire la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{x}{\tau} = \dfrac{X_1}{\tau}, \\ x(0) = X_0. \end{cases}$$

1. On commence par résoudre l'**équation homogène** :

   $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{x}{\tau} = 0.$$

   La solution générale de l'équation homogène est

   $$x_h(t) = Ae^{-t/\tau}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

2. On cherche ensuite une **solution particulière**. Le second membre est constant, on cherche une solution particulière constante $x_p(t) = B$, avec $B \in \mathbb{R}$. On injecte cette solution dans l'équation différentielle :

   $$0 + \frac{B}{\tau} = \frac{X_1}{\tau} \quad \text{d'où} \quad x_p(t) = B = X_1.$$

3. L'équation différentielle (1) est linéaire, la **solution générale** est la somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière :

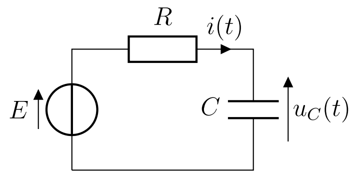
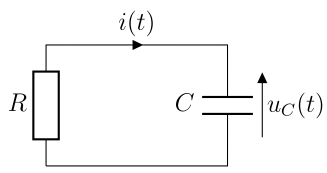
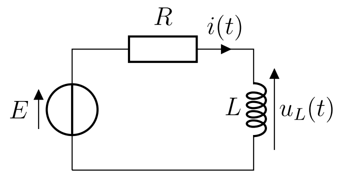
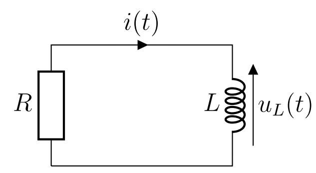
   $$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = Ae^{-t/\tau} + X_1.$$

4. On détermine finalement la constante A en utilisant la **condition initiale** :

   $$x(0) \underset{\text{sol°}}{=} A + X_1 \underset{\text{C.I.}}{=} X_0 \qquad \text{d'où} \qquad A = X_0 - X_1.$$

5. L'**unique solution** de l'équation (1) vérifiant $x(0) = X_0$ est :

   $$\boxed{x(t) = (X_0 - X_1)e^{-t/\tau} + X_1.}$$

Circuit	RC		RL	
Schéma				
Grandeur électrique	$u_C(t)$		$i(t)$	
Temps caractéristique	$\tau = RC$		$\tau = \dfrac{L}{R}$	
Équation différentielle	$\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$	$\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{\tau} = 0$	$\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{i}{\tau} = \dfrac{E/R}{\tau}$	$\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{i}{\tau} = 0$
Condition initiale	$u_C(t=0) = 0$	$u_C(t=0) = E$	$i(t=0) = 0$	$i(t=0) = \dfrac{E}{R}$
Solution	$u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$	$u_C(t) = Ee^{-t/\tau}$	$i(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$	$i(t) = \dfrac{E}{R}e^{-t/\tau}$
Bilan énergétique	$\mathcal{P}_\mathrm{J} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Cu_C^2\right) = \mathcal{P}_\mathrm{g}$	$\mathcal{P}_\mathrm{J} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Cu_C^2\right) = 0$	$\mathcal{P}_\mathrm{J} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Li^2\right) = \mathcal{P}_\mathrm{g}$	$\mathcal{P}_\mathrm{J} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Li^2\right) = 0$
Énergie stockée	$\dfrac{1}{2}Cu_C^2$		$\dfrac{1}{2}Li^2$	

1 Approche expérimentale

Expérience 1 : Circuit RC série soumis à un échelon de tension

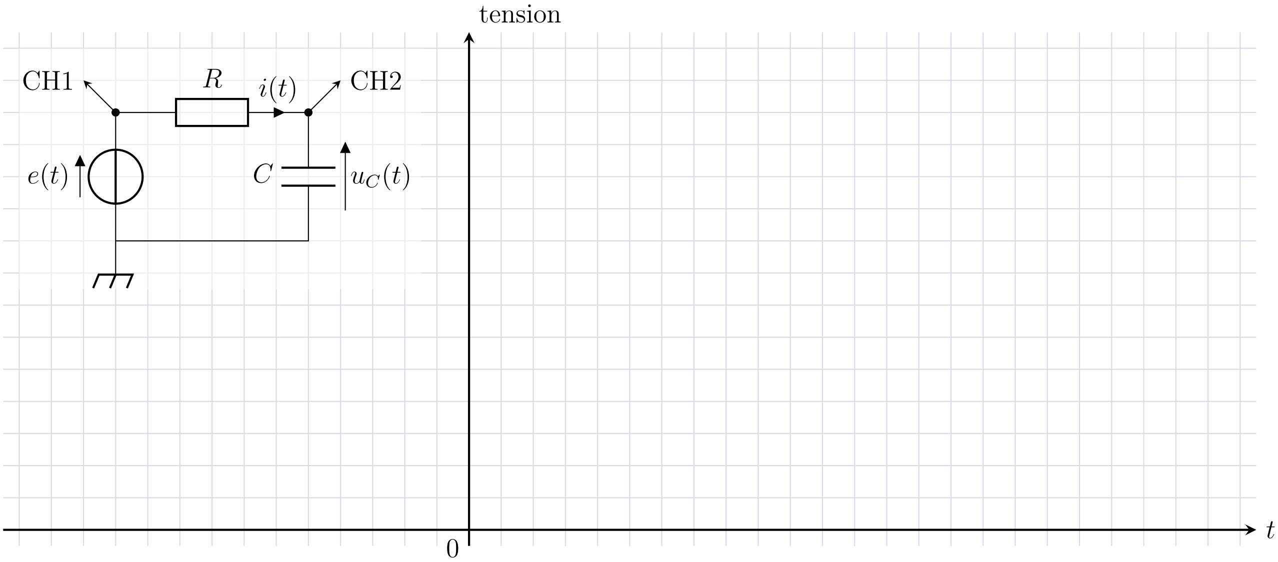
On peut distinguer deux régimes dans la réponse d'un circuit RC série soumis à un échelon de tension.

- oscilloscope ;
- GBF ;
- boîte à décades R ;
- boîte à décade C ;
- fils ;
- rallonge.

Définition

Un **échelon de tension** $e(t)$ entre les tensions $0\,\mathrm{V}$ et E à l'instant $t = 0$ est tel que

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0\,; \\ E & \text{pour } t \geqslant 0. \end{cases}$$



Définition

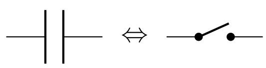
On distingue deux régimes de fonctionnement :

- le régime **permanent** ou **établi**, lorsque la réponse du système prend la même forme que l'entrée (ici une constante, mais cela peut aussi être un régime sinusoïdal par exemple). Si le régime permanent est constant (*i.e.* indépendant du temps), on parle de régime **stationnaire** ;
- le régime **transitoire** qui relie deux régimes permanents.

Propriété 1

En **régime stationnaire** :

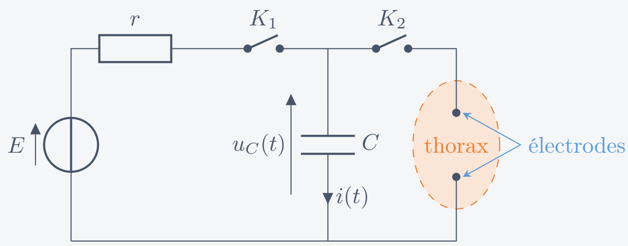
- un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert :



- une bobine est équivalente à un fil :

Application 1 – Défibrillateur (1)

Le défibrillateur automatisé externe (DAE) est un dispositif médical qui limite significativement le risque de mortalité en cas de malaise cardiaque, au moyen de décharges électriques délivrées au cœur. Le DAE peut être modélisé selon le montage représenté ci-dessous.



Le fonctionnement du DAE peut se décomposer en deux étapes :

- la **charge**, où K_1 est fermé et K_2 est ouvert : le condensateur ($C = 470\,\mu\mathrm{F}$) du DAE est chargé par un générateur haute-tension ($E = 1500\,\mathrm{V}$) ;
- la **décharge**, où K_2 est fermé et K_1 est ouvert : le condensateur est déchargé pour produire le choc électrique reçu par le patient.

1. On suppose que K_1 est fermé depuis suffisamment longtemps pour que le régime permanent soit atteint (K_2 est ouvert). Représenter le schéma électrique simplifié équivalent au DAE dans ce cas et en déduire l'expression de la tension u_C en fonction de E.

2. Exprimer, puis calculer l'énergie $\mathcal{E}_{C,0}$ alors stockée par le condensateur.

2 Décharge du condensateur

2.1 Équation différentielle

Application 2 – Défibrillateur (2)

À l'instant $t = 0$ et alors que l'interrupteur K_1 est ouvert, l'opérateur ferme l'interrupteur K_2 pour administrer le choc électrique au patient. Lors de la décharge, on assimile le thorax du patient à un conducteur ohmique de résistance $R = 50\,\Omega$.

1. Faire un schéma électrique équivalent au DAE lors de la décharge.

2. Utiliser la loi des mailles pour obtenir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur, pour $t \geqslant 0$.

3. Donner la dimension de RC. Faire l'application numérique.

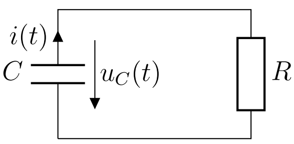
4. Que devient cette équation en régime permanent ? En déduire les valeurs de $u_C(t)$ et $i(t)$ en régime permanent.

5. Retrouver ces valeurs à partir d'un circuit électrique équivalent.

Propriété 2 (à démontrer)

Dans un circuit RC sans source, la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur vérifie

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{u_C(t)}{\tau} = 0, \quad \text{où} \quad \tau = RC.$$



τ est le **temps caractéristique** d'évolution de la tension aux bornes du condensateur.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (EDL1) :

- toute combinaison linéaire de solutions de l'équation est aussi solution de l'équation ;
- elle ne fait apparaitre que des dérivées d'ordre 1.

Ici, le second membre est nul : on parle d'**équation homogène** ou **sans second membre**.

2.2 Évolution de la tension aux bornes du condensateur

Solutions de l'équation homogène

Propriété 3

Les **solutions** de l'équation différentielle linéaire homogène

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{u_C(t)}{\tau} = 0$$

sont de la forme

$$u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau},$$

où U_0 est une tension constante qui dépend des conditions initiales.

Conditions initiales

La solution au problème étudié dépend de plus des conditions initiales. Celles-ci doivent être soigneusement justifiées.

L'énergie est toujours une grandeur continue : en effet une discontinuité de l'énergie impliquerait un transfert d'énergie instantané, ce qui conduirait à l'échange d'une puissance infinie. Ceci est impossible. La continuité de l'énergie stockée par certains dipôles implique la continuité de certaines grandeurs électriques dans le circuit.

Propriété 4

L'énergie $\mathcal{E}_C(t)$ stockée par un condensateur chargé à une tension $u_C(t)$ et l'énergie $\mathcal{E}_L(t)$ emmagasinée par une bobine parcourue par un courant d'intensité $i(t)$ s'écrivent

$$\mathcal{E}_C(t) = \frac{1}{2}Cu_C^2(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t).$$

La **tension** $u_C(t)$ **aux bornes du condensateur** et l'**intensité** $i_L(t)$ **du courant qui traverse la bobine** sont donc **continues**.
En revanche, l'intensité du courant qui traverse le condensateur et la tension aux bornes de la bobine ne sont a priori pas continues.

Application 3 – Défibrillateur (3)

1. On s'intéresse au régime transitoire. Donner la solution générale de cette équation.
2. Que peut-on dire de la tension $u_C(t)$ lors de la fermeture de K_1 à l'instant $t = 0$? En déduire la condition initiale vérifiée par $u_C(t)$ en $t = 0$.
3. Donner la solution $u_C(t)$.

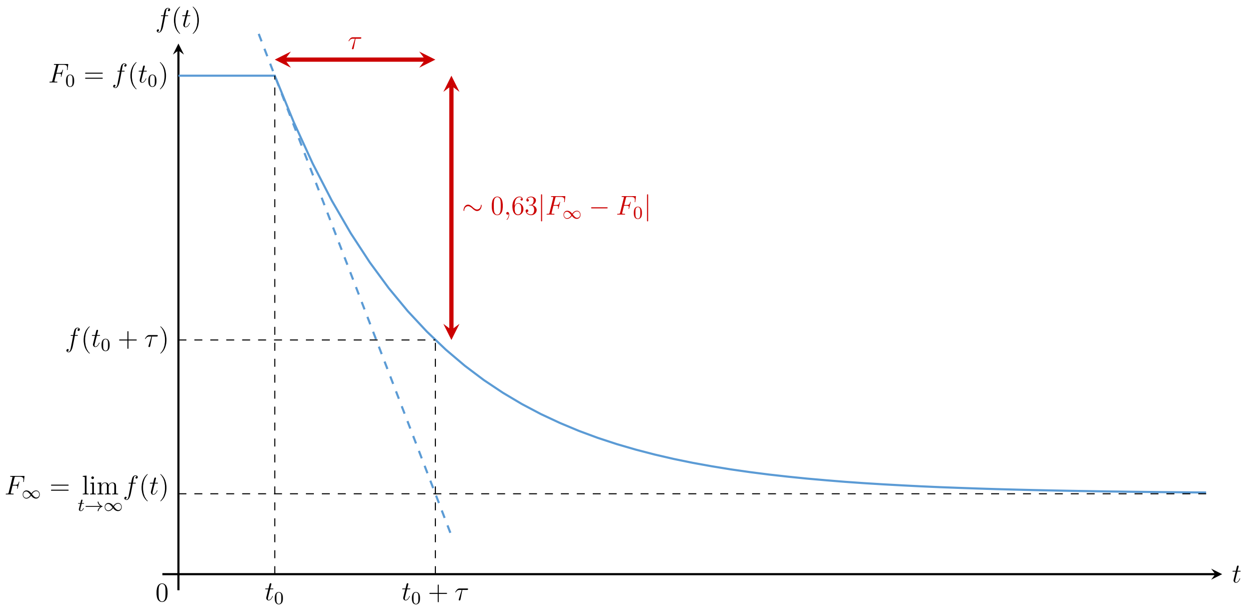
2.3 Temps caractéristique

Application 4 – Défibrillateur (4)

1. Représenter graphiquement la solution $u_C(t)$ trouvée précédemment.
2. Donner la valeur du rapport $u_c(\tau)/E$. Faire apparaitre graphiquement le temps caractéristique τ associé à la décharge du condensateur.
3. Exprimer l'instant t_d à partir duquel le condensateur est complètement déchargé, c'est-à-dire le temps à partir duquel la tension à ses bornes est inférieure à 1 % de sa valeur initiale.

Pour mesurer graphiquement le temps caractéristique d'une exponentielle, on peut utiliser :

- la méthode de la **tangente à l'origine** : peu précise mais rapide. On trace la tangente à l'origine t_0 et l'asymptote en $t \to \infty$. Ces deux droites se coupent à l'instant t_1 : on alors $\tau = t_1 - t_0$;
- la **méthode des 63 %** : on mesure la durée τ nécessaire pour que la fonction parcourt 63 % du chemin entre sa valeur à t_0 et sa valeur limite en $t \to \infty$.



Propriété 5

Pour un circuit du premier ordre associé à un temps caractéristique τ, la durée du régime transitoire est de l'ordre de 5τ.

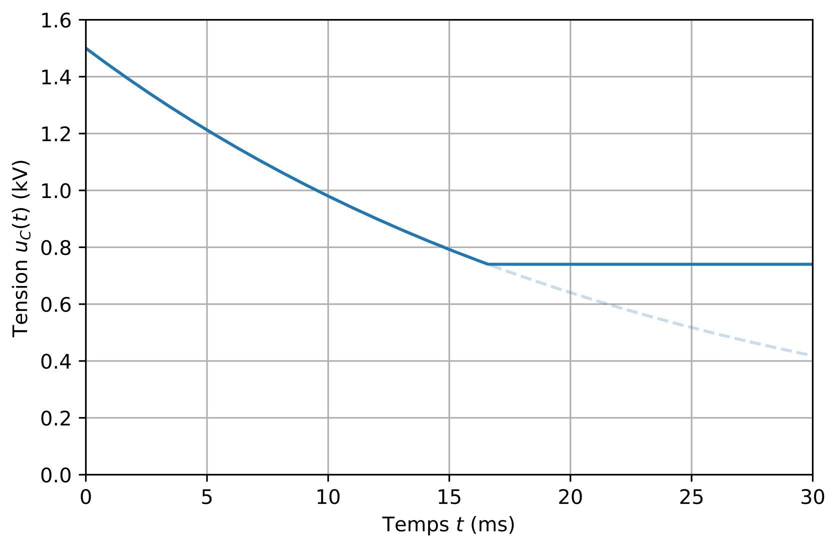
2.4 Bilan énergétique

Propriété 6

De manière générale, pour faire un bilan énergétique, on multiplie la loi des maille par i.

Application 5 – Défibrillateur (5)

En réalité, l'interrupteur K_2 s'ouvre automatiquement pour interrompre la décharge quand une énergie électrique $W = 400\,\mathrm{J}$ a été délivrée au patient. L'évolution de la tension aux bornes du condensateur lors d'un choc est représentée ci-dessous.



1. Déterminer graphiquement la date t_1 à laquelle s'arrête la décharge partielle du condensateur et la valeur de la tension $u_C(t_1)$ à cette date.

2. À partir de la solution obtenue précédemment, exprimer $u_C(t_1)$ et t_1 à l'aide d'un raisonnement énergétique. Faire les applications numérique. Commenter.

3. À l'aide d'un bilan énergétique, montrer que l'intégralité de cette énergie est dissipée par effet Joule.

3 Charge du condensateur

Pour trouver *les* solutions d'une EDL1 avec second membre constant, on cherche une solution particulière constante que l'on ajoute à la solution de l'équation homogène. *La* solution se déduit **ensuite** des conditions initiales.

Propriété 7

Les **solutions** de l'équation différentielle linéaire avec second membre U_0 constant

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{u_C(t)}{\tau} = \frac{U_1}{\tau}$$

sont de la forme

$$u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau} + U_1,$$

où U_0 est une tension constante qui dépend des conditions initiales.

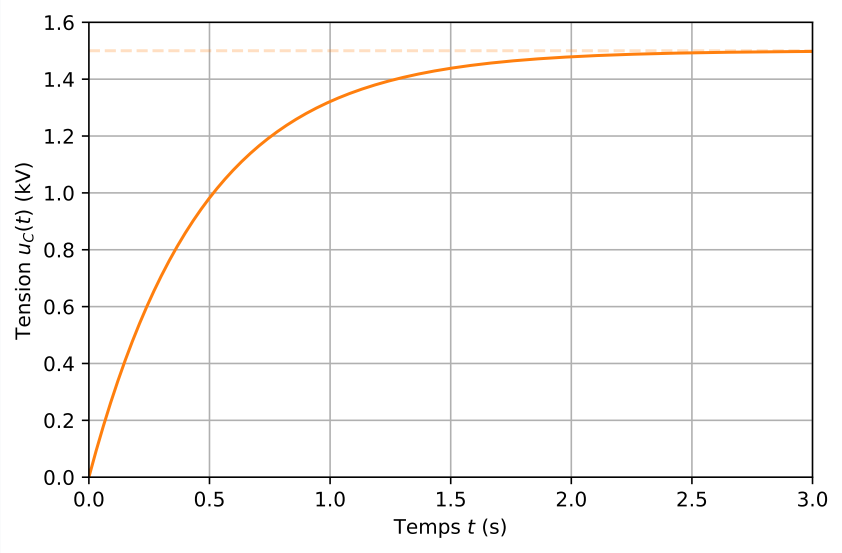
Rq : Attention ! Lorsque l'équation différentielle est écrite sous forme canonique, le second membre est de la forme U_1/τ et non U_1. Il vaut toujours mieux **retrouver** la solution particulière en injectant une solution constante dans l'équation différentielle.
Rq : La solution particulière U_1 correspond à la solution en régime stationnaire.
Rq : L'utilisation des conditions initiales pour déterminer U_0 se fait **toujours après** avoir obtenue la solution générale (solution de l'équation homogène + solution particulière).

3.1 Évolution de la tension aux bornes du condensateur

Application 6 – Défibrillateur (6)

On s'intéresse maintenant à la charge du condensateur. À l'instant t_0 on ferme l'interrupteur K_1 (K_2 est ouvert).

1. Représenter le schéma électrique équivalent au DAE lors de la charge.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$.
3. Résoudre cette équation, en supposant que le condensateur était complètement déchargé avant la fermeture de l'interrupteur K_1. On choisira la nouvelle origine des temps à $t = t_0$.



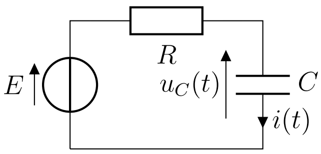
L'évolution de la tension aux bornes du condensateur pendant la charge est représentée ci-dessus.

4. Avec deux méthodes différentes, déterminer graphiquement le temps caractéristique τ' de la charge du condensateur.
5. En déduire la valeur de la résistance r.

Propriété 8

Dans un circuit RC avec source, la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur vérifie

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{u_C(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau}, \quad \text{où} \quad \tau = RC.$$



τ est le temps caractéristique d'évolution de la tension aux bornes du condensateur.

3.2 Bilan énergétique

Application 7 – Défibrillateur (7)

À l'aide d'un bilan énergétique, montrer que lors de la charge du condensateur, le générateur doit fournir deux fois plus d'énergie que celle qui est stockée dans le condensateur complètement chargé. Que devient l'autre moitié de l'énergie fournie par le générateur ?

4 Cas du circuit RL

L'étude d'un circuit RL série aboutit aux mêmes équations différentielles que pour le condensateur, mais celles-ci portent généralement sur l'intensité qui traverse la bobine. L'expression du temps caractéristique change également.

Propriété 9

Le **temps caractéristique** d'évolution des grandeurs électriques dans un circuit RL série est

$$\tau = \frac{L}{R}.$$

Une fois l'équation différentielle écrite sous forme canonique et les conditions initiales trouvées, la résolution est la même que précédemment (Doc. 1).

Méthode de résolution

En général, on s'intéresse à un circuit soumis à une perturbation à l'instant $t = 0$: échelon de tension, commutation d'un interrupteur, etc. Pour étudier le comportement du circuit, on peut procéder comme suit.

1. Détermination des **conditions initiales**.
   - faire un schéma équivalent en $t = 0^-$ où le régime permanent est établi ;
   - utiliser les lois de Kirchhoff et la loi d'Ohm pour déterminer la tension aux bornes du condensateur ou l'intensité qui traverse la bobine ;
   - invoquer la continuité de l'énergie pour justifier la continuité de la tension aux bornes du condensateur ou de l'intensité traversant une bobine : on a alors $u_C(t = 0^-) = u_C(t = 0^+) = u_C(t = 0)$ ou $i_L(t = 0^-) = i_L(t = 0^+) = i_L(t = 0)$.
2. Obtention de l'**équation différentielle**.
   - faire un schéma simplifié : remplacer les interrupteur fermés par des fils, association de résistances, éliminer les branches inutiles ;
   - utiliser les lois de Kirchhoff et les lois de comportement.
3. **Résolution** de l'équation différentielle
   - obtenir la solution de l'équation différentielle (Doc. 1) ;
   - vérifier que la solution est acceptable : schéma électrique équivalent en régime permanent, équation différentielle en régime permanent, $t \to \infty$)
4. Faire un **bilan énergétique** : multiplier la loi des mailles par i.

5 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler permet d'intégrer numériquement une équation différentielle d'ordre 1, linéaire ou non, en procédant par itération pour obtenir une solution approchée. Cette méthode est décrite dans le TD E2.