# Chapitre E3 – Circuits du deuxième ordre

## Plan du cours



## Ce qu'il faut savoir et savoir faire

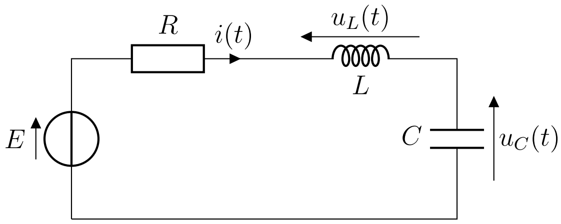
→ Établir l'équation différentielle qui caractérise l'évolution d'une grandeur électrique dans un circuit LC ; la résoudre compte-tenu des conditions initiales.
→ Réaliser un bilan énergétique pour le circuit LC.
→ Écrire sous forme canonique l'équation différentielle qui caractérise l'évolution d'une grandeur électrique dans un circuit RLC afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.
→ Identifier la nature de la réponse libre en fonction de la valeur du facteur de qualité.
→ Déterminer la réponse dans le cas d'un régime libre ou indiciel en recherchant les racines du polynôme caractéristique et en tenant compte des conditions initiales.
→ Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.
→ Réaliser un bilan énergétique pour un circuit RLC série.

## Questions de cours

→ Établir l'équation différentielle vérifiée par une des grandeurs électriques dans un circuit LC (App. 1).
→ Résoudre cette équation pour des conditions initiales données.
→ À partir de l'expression analytique d'une solution donnée par le colleur, représenter graphiquement l'évolution temporelle de cette solution, en faisant apparaitre la période, l'amplitude et la valeur moyenne, ainsi que leur lien avec l'expression analytique.
→ Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes d'un condensateur d'un RLC série et la résoudre.
→ Écrire, sans démonstration, la forme canonique d'une équation différentielle d'oscillateur amorti. Lister les différentes formes que peuvent prendre les solutions en fonction de la valeur du facteur de qualité.
→ Relier la durée du régime transitoire aux racines du polynôme caractéristique.

# Documents

## Document 1 – Résolution d'une équation différentielle du second ordre




Dans le circuit RLC série représenté ci-dessus, la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur, sa charge électrique $q(t)$ et l'intensité du courant $i(t)$ vérifient l'équation d'un oscillateur amorti :

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) + \omega_0^2 f(t) = \text{cste}, \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Prenons l'exemple de l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ dans un circuit RLC série avec source. Sous sa forme canonique, l'équation s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 E.$$

### Solution de l'équation homogène

Comme pour le premier ordre, on commence par résoudre l'équation homogène :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0,$$

dont les solutions sont de la forme $e^{rt}$, avec $r \in \mathbb{C}$ racine du **polynôme caractéristique**, c'est-à-diresolution de l'équation caractéristique

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0, \quad \text{de discriminant} \quad \Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 (1 - 4Q^2).$$

On peut alors distinguer trois régimes suivant le signe de $\Delta$ :

- si $\Delta > 0$, soit $Q < \frac{1}{2}$, le polynôme caractéristique admet deux racines réelles négatives $r_\pm$ :

  $$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1 - 4Q^2} < 0.$$

  La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors :

  $$u_{C,\mathrm{h}}(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t}, \quad \text{où} \quad A \text{ et } B \text{ sont des constantes à déterminer.}$$

  Ce régime correspond à un **amortissement fort** : on parle alors de régime **apériodique**.
- si $\Delta = 0$, soit $Q = \frac{1}{2}$, le polynôme caractéristique admet une racine double $r$ négative :

  $$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0 < 0.$$

  La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors :

  $$u_{C,\mathrm{h}}(t) = (At + B)e^{rt}, \quad \text{où} \quad A \text{ et } B \text{ sont des constantes à déterminer.}$$

  On parle alors de régime **critique**.

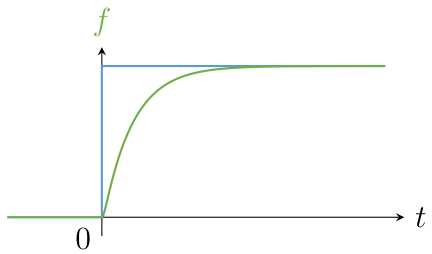
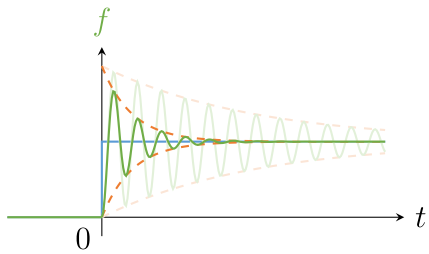
- si $\Delta < 0$, soit $Q > \frac{1}{2}$, le polynôme caractéristique admet deux racines complexes $r_\pm$ :

  $$r_\pm = -\mu \pm j\Omega, \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

  La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors :

  $$u_{C,\mathrm{h}}(t) = e^{-\mu t}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)) = U_m e^{-\mu t}\cos(\Omega t + \varphi),$$

  où $(A, B)$ ou $(U_m, \varphi)$ sont des couples de constantes à déterminer. Ce régime correspond à un **amortissement faible** : on parle alors de régime **pseudo-périodique**, de **pseudo-période** $T = 2\pi/\Omega$ et **pseudo-pulsation** $\Omega$, différente de $\omega_0$.
  Dans le cas où l'amortissement est très faible, c'est-à-dire pour $Q \gg 1$, la pseudo-pulsation est très proche de la pulsation propre ($\Omega \approx \omega_0$) et le nombre d'oscillations pendant le régime transitoire est de l'ordre de $Q$.

| **Facteur de qualité** | $Q < \frac{1}{2}$ | $Q = \frac{1}{2}$ | $Q > \frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|
| **Régime** | apériodique | critique | pseudo-périodique |
| **Racines du polynôme $r_\pm$** | $-\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}$ | $-\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$ | $-\mu \pm j\Omega = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ |
| **Solution de l'équation homogène** | $Ae^{r_+t} + Be^{r_-t}$ | $(At + B)e^{rt}$ | $e^{-\mu t}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$ |
| **Durée du régime transitoire** | quelques $\frac{1}{\lvert r_+\rvert}$ | quelques $\frac{1}{\lvert r\rvert}$ | quelques $\frac{1}{\mu}$ |
| **Évolution temporelle (échelon)** |  | |  |

### Solution particulière

Avec un second membre constant, on cherche une solution particulière constante. Ici, $u_{C,\mathrm{p}}(t) = E$ convient.

### Utilisation des conditions initiales

Comme pour le premier ordre, la **solution générale** s'obtient en sommant la solution de l'équation homogène et la solution particulière. Les coefficients $A$ et $B$ (ou $U_m$ et $\varphi$) s'obtiennent finalement en utilisant les conditions initiales avec la continuité des intensité parcourant la bobine et tension aux bornes du condensateur. Ici :

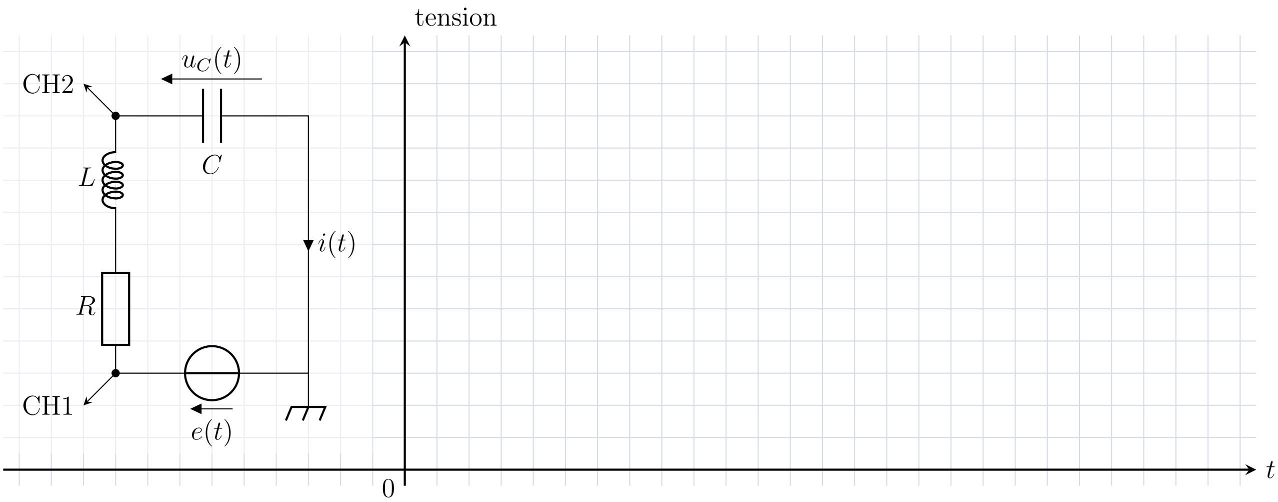
- la tension aux bornes du condensateur est continue : $u_C(0^-) = u_C(0^+) = u_C(0)$ ;
- l'intensité du courant parcourant la bobine est continue : $\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0^-} = \left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0^+} = \left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0}$.

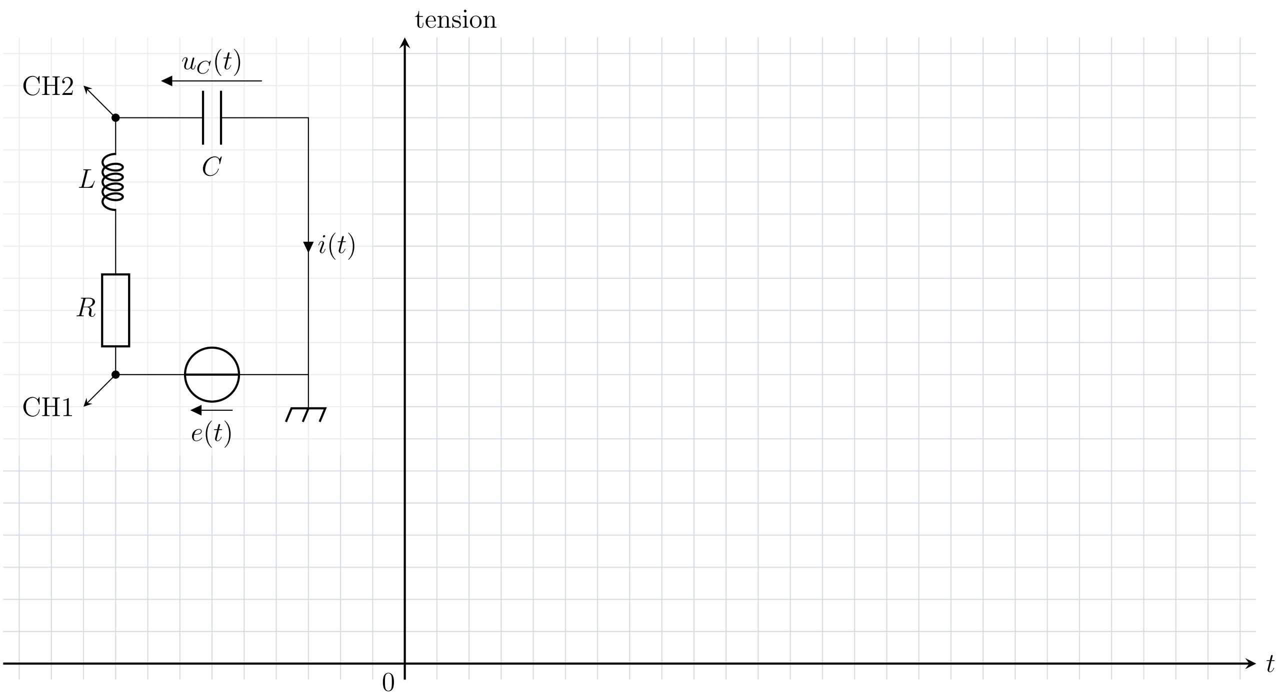
# 1 Approche expérimentale et numérique

**Expérience 1 : Circuit RLC soumis à un échelon de tension**

À quoi ressemble le régime transitoire dans un circuit RLC ? A-t-il toujours la même allure si l'on change les valeurs des composants ?

- oscilloscope ;
- GBF ;
- boite à décades $R$ ;
- boite à décades $C$ ;
- bobine 1000 ou 500 spires ;
- fils.




**python Circuit RLC soumis à un échelon de tension**

`chapE3-oscillateur_amorti.py`

Comme dans le chapitre précédent, on peut distinguer deux régimes :

- le **régime transitoire** ;
- le **régime permanent**.

Pour certaines valeurs de résistance, capacité et inductance, le régime transitoire *semble* proche de celui d'un circuit du premier ordre, mais pour d'autres, il peut présenter des **oscillations**. Le choix des composants semble influencer :

- la nature du régime transitoire, oscillant ou non ;
- la durée du régime transitoire ;
- la pseudo-période des oscillations.

### Oscillateur harmonique, oscillateur amorti

Dans ce chapitre, on ne s'intéresse qu'à des circuits électriques, mais les résultats que l'on va établir sont communs à de nombreuses applications, car les équations qui modélisent ces systèmes sont identiques. Les modèles que l'on abordera s'appliquent à des systèmes :

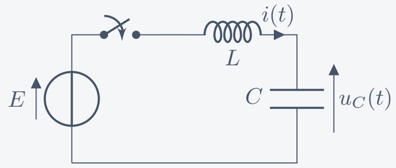
- mécaniques : pendule, diapason, asservissement (SI) ;
- électroniques : quartz, etc.
- optiques : laser, etc.
- quantiques, etc.

# 2 Circuit LC : modèle de l'oscillateur harmonique

## 2.1 Équation différentielle

**Application 1 – Équation différentielle associée à un circuit LC série**

On considère le circuit représenté ci-contre, composé d'un générateur idéal de tension de f.é.m. $E$, d'une bobine d'inductance $L$ et d'un condensateur de capacité $C$. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.




1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ pour $t \geqslant 0$.
2. Donner la dimension de $\sqrt{LC}$.
3. Comment pourrait-on obtenir l'équation différentielle vérifiée par la charge du condensateur $q(t)$ ? Et par l'intensité du courant $i(t)$ ?

**Définition**

L'équation associée à un **oscillateur harmonique** de **pulsation propre** $\omega_0$ s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2 f(t) = \text{cste}.$$

**Rq :** Le second membre peut être constant ou non. Il le sera dans ce chapitre.

**Propriété 1**

Dans un circuit LC série, la tension aux bornes du condensateur, sa charge et l'intensité dans le circuit vérifient l'équation d'un **oscillateur harmonique** de pulsation propre

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

## 2.2 Résolution

**Application 2 – Solution oscillante**

La tension $u_C(t)$ vérifie l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0$. Les solutions de l'équation homogène peuvent s'écrire sous les formes :

$$u_C(t) = U_m\cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m\sin(\omega_0 t + \psi) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t).$$

**1.** Vérifier que la première forme est solution de l'équation homogène.

**2.** Montrer que la deuxième forme est aussi solution et préciser la relation entre $\varphi$ et $\psi$.

**3.** Montrer que la dernière forme est équivalente à la première, puis à la deuxième en utilisant les formules d'addition. Exprimer $A$ et $B$ en fonction de $U_m$, $\varphi$ et/ou $\psi$.

**Propriété 2**

La solution générale de l'équation homogène d'un **oscillateur harmonique** de pulsation propre $\omega_0$

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

peut s'écrire sous les formes :

$$u_C(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = U_m\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

où $(A, B)$ ou $(U_m, \varphi)$ sont des constantes qui dépendent des conditions initiales.

Pour résoudre l'équation d'un oscillateur harmonique, on applique la même méthode que pour résoudre une EDL1. Seule la forme de la solution de l'équation homogène change.

1. Écrire la solution générale de l'équation homogène $u_{C,\mathrm{h}}(t)$ ;
2. Trouver une solution particulière $u_{C,\mathrm{p}}(t)$ (constante si le second membre l'est) ;
3. Exprimer la solution générale de l'EDL2 $u_C(t) = u_{C,\mathrm{h}}(t) + u_{C,\mathrm{p}}(t)$ ;
4. Déterminer les constantes d'intégration en exploitant les conditions initiales

$$u_C(t_0) = C_1 \quad \text{et} \quad \left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} = C_2 \ ;$$

5. Conclure en donnant *la* solution de l'équation.

**Application 3 – Détermination des conditions initiales**

On reprend la situation décrite dans l'App. 1. On suppose qu'avant la fermeture de l'interrupteur, le condensateur est déchargé et que l'intensité du courant est nulle.

**1.** Donner les valeurs de l'intensité $i(t)$ et de la tension $u_C(t)$ en $t = 0^+$. Justifier.

**2.** En déduire les deux conditions initiales portant sur $u_C(t)$ et sa dérivée première.

**3.** Déterminer l'expression des constantes d'intégration pour exprimer la solution $u_C(t)$.

**4.** Représenter graphiquement $u_C(t)$ et faire apparaitre la période $T$, l'amplitude $U_1$ et la valeur moyenne de ce signal $U_0$. Exprimer ces paramètres en fonctions de $E$, $L$ et $C$.

**Propriété 3 (à démontrer)**

La **période propre** des oscillations de l'oscillateur harmonique est liée à sa pulsation propre par la relation :

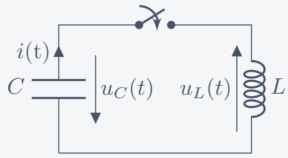
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0.$$

De manière générale, on retiendra le **lien pulsation-fréquence** : $\omega = 2\pi f$, où $\omega$ s'exprime en radians par seconde ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) et $f$ en hertz (Hz).

## 2.3 Conservation de l'énergie

**Application 4 – Conservation de l'énergie**

On considère le circuit LC représenté ci-contre. Le condensateur est initialement chargé sous une tension $E$, de sorte que $u_C(t = 0^-) = E$. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.




1. Donner l'expression de la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ et de l'intensité du courant $i(t)$ pour $t \geqslant 0$.
2. En déduire l'expression de l'énergie $\mathcal{E}_C(t)$ stockée par le condensateur et celle $\mathcal{E}_L(t)$ emmagasiné par la bobine en fonction du temps.
3. Les représenter sur un même graphe et montrer qu'à tout instant $\mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t) = \mathcal{E}_0$, où $\mathcal{E}_0$ est l'énergie stockée par le condensateur avant la fermeture de l'interrupteur.

**Propriété 4**

Dans un circuit sans source on a

$$\mathcal{P}_C + \mathcal{P}_L = 0,$$

où $\mathcal{P}_C$ est la puissance reçue par le condensateur et $\mathcal{P}_L$ est celle reçue par la bobine.

Les deux composants s'échangent l'énergie contenue dans le système {condensateur + bobine}, sans dissipation :

- quand le condensateur se comporte comme un générateur, on a $\mathcal{P}_L = -\mathcal{P}_C$ : la puissance fournie par le condensateur est intégralement reçue par la bobine ;
- quand la bobine se comporte comme un générateur, on a $\mathcal{P}_C = -\mathcal{P}_L$ : la puissance fournie par la bobine est intégralement reçue par le condensateur.

# 3 Circuit RLC, modèle de l'oscillateur amorti

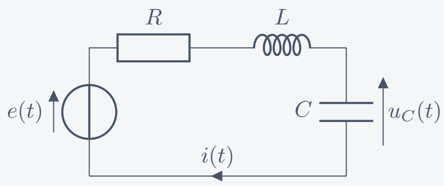
La conservation de l'énergie observée pour l'oscillateur harmonique ne s'applique pas aux systèmes réels. En pratique, les oscillations finissent par s'amortir car il existe toujours des mécanismes dissipatifs.

## 3.1 Équation différentielle

**Application 5 – Équation différentielle de l'oscillateur amorti**

On considère le circuit RLC série représenté ci-contre. Le générateur impose un échelon de tension parfait, c'est-à-dire :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ E & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$




1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ pour $t \geqslant 0$.
2. L'écrire sous sa forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 E.$$

   Donner l'expression de la pulsation propre $\omega_0$ et du facteur de qualité $Q$.
3. Quelle est la dimension de $Q$ ?

**Définition**

L'équation associée à un **oscillateur amorti** de **pulsation propre** $\omega_0$ et de **facteur de qualité** $Q$ s'écrit sous forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) + \omega_0^2 f(t) = \text{cste}.$$

**Propriété 5 (à démontrer)**

Dans un circuit RLC série, la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$, sa charge $q(t)$ et l'intensité $i(t)$ du courant dans le circuit vérifient l'équation d'un **oscillateur amorti** de pulsation propre $\omega_0$ et de facteur de qualité $Q$, avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

**Rq :** L'expression du facteur de qualité n'est valable que pour un circuit RLC **série** !

**python Oscillateur faiblement amorti**

`chapE3-oscillateur_amorti.py`

Que se passe-t-il si l'on change le signe de la constante devant la dérivée première ? Vérifier que l'on retrouve l'évolution d'un oscillateur harmonique quand $Q \to \infty$. Mettre en évidence les limites de la méthode d'Euler en traçant la solution numérique obtenue pour des valeur de $R$ faibles.

**Rq :** Dans l'équation sous sa forme canonique, la constante $\omega_0/Q$ devant la dérivée première est positive : il s'agit d'un terme d'**amortissement**, de **modération** qui assure la convergence de la solution. Sinon, il s'agirait d'un terme d'**amplification** qui mènerait à une divergence inquiétante de la solution.

**Rq :** Dans le cas où l'amortissement est négligeable, c'est-à-dire quand $R \to 0$, soit $Q \to \infty$, on retrouve bien l'équation de l'oscillateur harmonique.

## 3.2 Différents régimes de fonctionnement

**Propriété 6 (à démontrer)**

Trouver les solutions de l'équation homogène d'un **oscillateur amorti** de pulsation propre $\omega_0$ et de facteur de qualité $Q$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) + \omega_0^2 f(t) = 0$$

revient à trouver les racines du **polynôme caractéristique** associé à l'équation différentielle homogène, c'est-à-dire les solutions de l'équation :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0.$$

Seules les solutions réelles de l'équation homogène nous intéressent, mais leur forme dépend de la nature des racines du polynôme caractéristique, que l'on déterminera dans $\mathbb{C}$. Le discriminant de l'équation caractéristique s'écrit

$$\Delta = \omega_0^2 \left(1 - 4Q^2\right),$$

et on distingue trois cas suivant son signe.

**Application 6 – Résistance critique**

On reprend le circuit de l'App. 5 et on donne $L = 1{,}0\,\mathrm{mH}$ et $C = 47\,\mathrm{nF}$.

1. Exprimer et calculer la valeur de la résistance critique $R_c$ correspondant au régime critique ($\Delta = 0$).
2. Donner la condition sur $R$ pour laquelle le régime transitoire présente des oscillations.

**Rq :** L'expression des racines du polynôme caractéristique n'est pas à apprendre par cœur mais doit pouvoir être retrouvée rapidement. En revanche, la forme des solutions de l'équation homogène doit être connue dans les trois cas.

python **Circuit RLC en régime apériodique**

`chapE3-oscillateur_amorti.py`

Représenter l'évolution de la tension aux bornes du condensateur dans chacun des cas qui suivent.

### Régime transitoire apériodique

Si le discriminant est strictement positif, c'est-à-dire si $Q < 1/2$, le polynôme caractéristique admet **deux racines réelles** et négatives

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1 - 4Q^2}.$$

**Propriété 7**

Si $Q < 1/2$, le régime transitoire est **apériodique**. La solution générale de l'équation homogène est alors de la forme

$$f(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t},$$

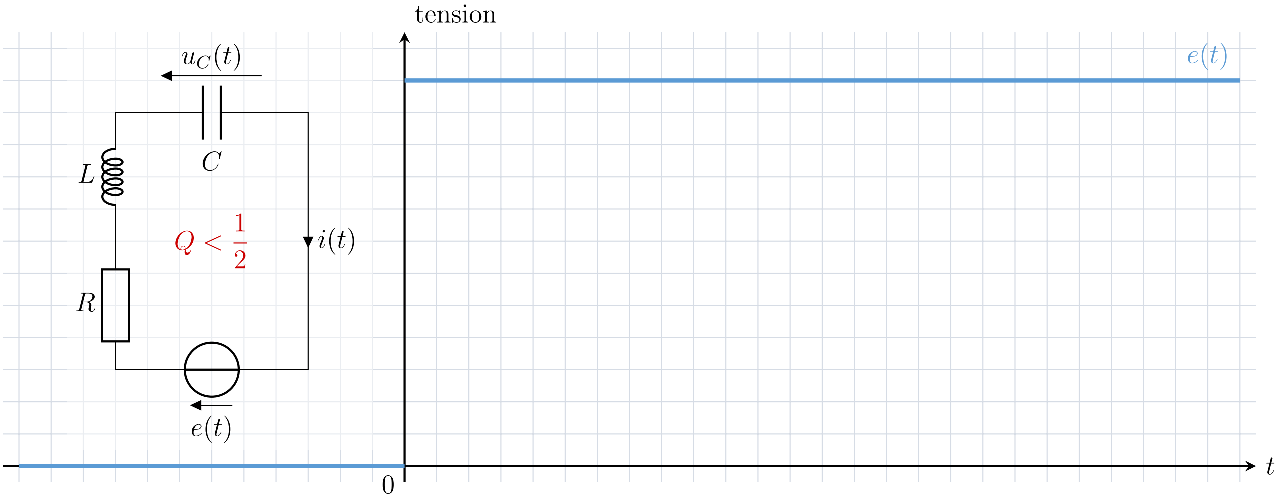
avec $A$ et $B$ deux constantes réelles qui dépendent des conditions initiales.

Le régime transitoire est apériodique si l'oscillateur est soumis à un amortissement fort : il possède un facteur de qualité faible et le régime transitoire ne présente pas d'oscillations. La durée du régime transitoire dépend alors du terme le plus lent de la solution, c'est-à-dire celui associé à l'exponentielle dont le temps caractéristique est le plus grand.

**Propriété 8**

La **durée du régime transitoire apériodique** est de l'ordre de $-5/r_+$.

« De loin », le régime transitoire apériodique ressemble au régime transitoire d'un circuit du premier ordre. La condition initiale sur la dérivée de la grandeur représentée impose toutefois une évolution différente, notamment au début du régime transitoire. Cette distinction doit apparaitre sur les représentations graphiques. On fera pour cela systématiquement apparaitre la tangente à l'origine.




### Régime transitoire critique

Si le discriminant est nul, c'est-à-dire si $Q = 1/2$, le polynôme caractéristique admet une **racine double réelle** et négative

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q}.$$

**Propriété 9**

Si $Q = 1/2$, le régime transitoire est **critique**. La solution générale de l'équation homogène est alors de la forme

$$f(t) = (At + B)e^{rt},$$

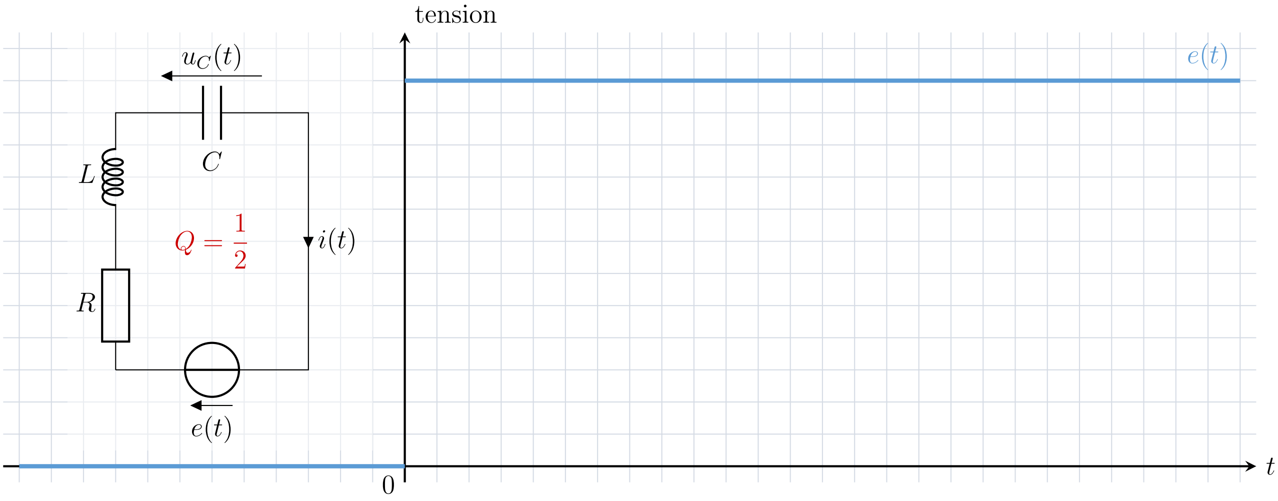
avec $A$ et $B$ deux constantes réelles qui dépendent des conditions initiales.

Le régime critique correspond à un cas limite, pour lequel le régime transitoire est le plus court. De plus, il ne présente pas d'oscillation : le régime permanent est atteint **sans dépassement**.

**Propriété 10**

La **durée du régime transitoire critique** est de l'ordre de $-5/r$.

Là encore, malgré la ressemblance avec un régime transitoire du premier ordre, les conditions initiales doivent apparaitre graphiquement.




### Régime pseudo-périodique

Si le discriminant est strictement négatif, c'est-à-dire si $Q > 1/2$, le polynôme caractéristique admet **deux racines complexes** conjuguées

$$r_{\pm} = -\mu \pm j\Omega = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

**Propriété 11**

Si $Q > 1/2$, le régime transitoire est **pseudo-périodique**. La solution générale de l'équation homogène est alors de la forme

$$f(t) = (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))e^{-\mu t} = U_m e^{-\mu t}\cos(\Omega t + \varphi),$$

avec $A$ et $B$ ou $U_m$ et $\varphi$ deux constantes qui dépendent des conditions initiales. $\Omega$ correspond à la **pseudo-pulsation** des oscillations.

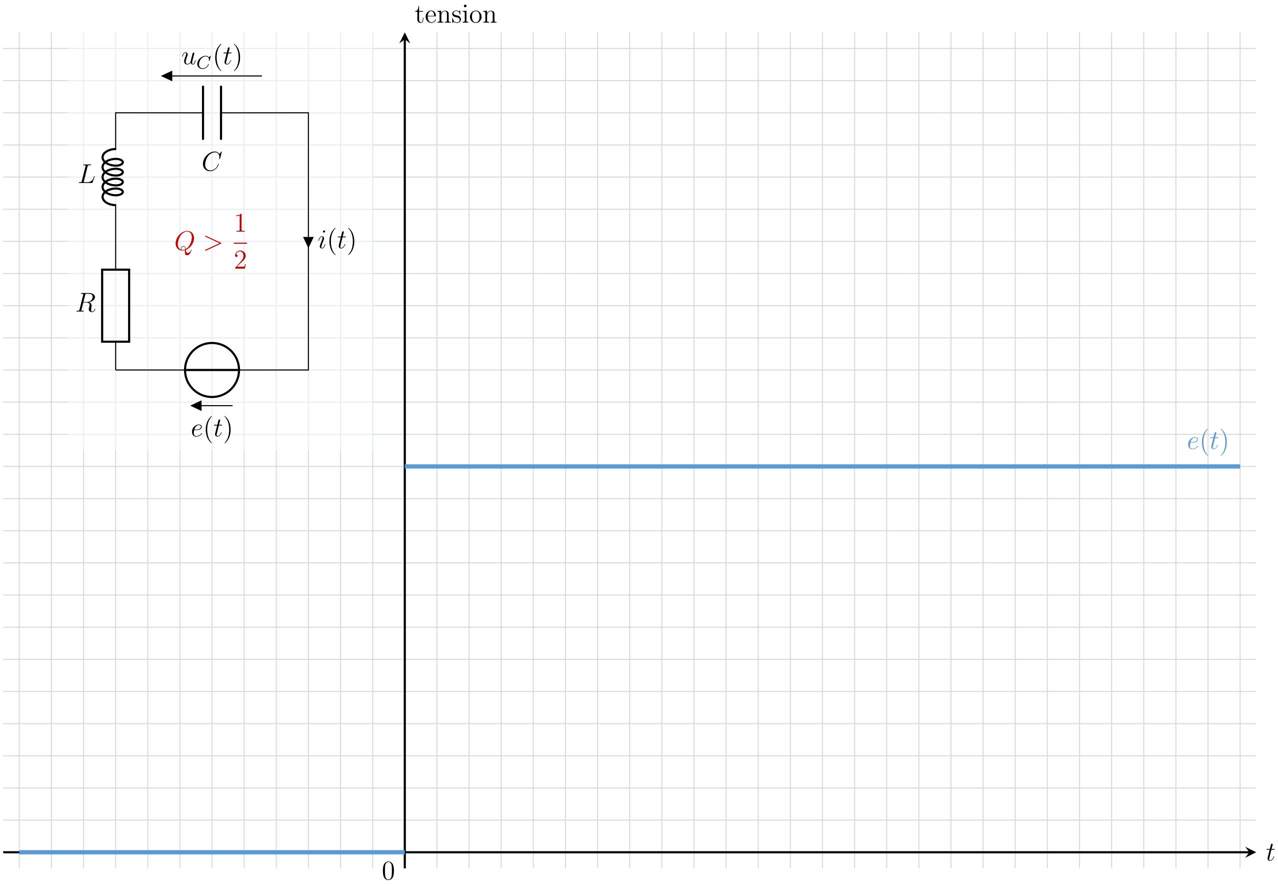
Le régime transitoire est pseudo-périodique si l'oscillateur est soumis à un amortissement faible : il possède un facteur de qualité élevé et le régime transitoire présente des oscillations. La durée du régime transitoire est donnée par l'enveloppe exponentielle des oscillations en $e^{-\mu t}$.

**Propriété 12**

La **durée du régime transitoire pseudo-périodique** est de l'ordre de $5/\mu$.

La pseudo-pulsation des oscillations du régime transitoire est **différente** de la pulsation propre. Seulement dans le cas d'un **oscillateur faiblement amorti**, c'est-à-dire si $Q \gg 1$, on a $\Omega \sim \omega_0$. En pratique, dès que $Q$ dépasse quelques unités, on pourra considérer $\Omega \approx \omega_0$.

Pendant le régime transitoire, la pseudo-pulsation, donc la pseudo-période est constante. Seule l'amplitude des oscillations décroit !




**Rq :** Durant le régime transitoire, le nombre d'oscillations visibles est de l'ordre de $Q$ (cf. TD E3. Ex. 2). Cela permet d'évaluer rapidement le facteur de qualité et de savoir si la période propre peut raisonnablement être approximée par la pseudo-période.

## 3.3 Résolution d'une équation différentielle du second degré

Pour résoudre une EDL2, on applique toujours la même méthode.

1. Écrire la solution générale de l'équation homogène (cf. Doc. 1) ;
2. Trouver une solution particulière (constante si le second membre l'est) ;
3. Exprimer la solution générale de l'équation avec second membre ;
4. Déterminer les constantes d'intégration en exploitant les conditions initiales.
5. Conclure en donnant *la* solution de l'équation qui satisfait les conditions initiales.

**Rq :** L'ordre des étapes importe ! La détermination des constantes d'intégration doit toujours se faire **après** avoir trouvé la solution générale de l'équation différentielle **avec** second membre.

**Application 7 – Solutions de l'oscillateur amorti**

On reprend la situation de l'App. 5 avec les valeurs des composants de l'App 6.

1. Donner, en les justifiant, les deux conditions initiales portant sur $u_C(t)$ et sa dérivée première.
2. Donner l'expression de $u_C(t)$ dans le cas où $R = 2R_c$.
3. En déduire l'expression de $i(t)$.
4. Représenter graphiquement $u_C(t)$.

**5.** Faire de même pour $R = R_c/10$.

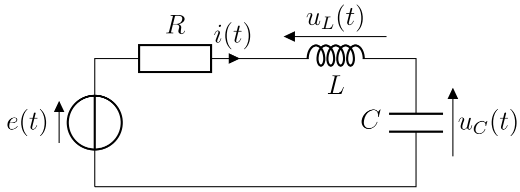
**Réponse :** Pour $R = 2R_c$,

$$u_C(t) = E\left(1 - \frac{r^+}{r^+ - r^-}e^{r^- t} + \frac{r^-}{r^+ - r^-}e^{r^+ t}\right).$$

Pour $R = R_c/10$,

$$u_C(t) = -E\left(\cos(\Omega t) - \frac{\mu}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)e^{-\mu t} + E.$$

## 3.4 Bilan énergétique




Le bilan énergétique s'effectue en multipliant la loi des mailles par $i(t)$ :

$$e(t)\cdot i(t) = Ri^2(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)\cdot i(t) + u_C(t)\cdot i(t).$$

Or :

$$u_L(t)\cdot i(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)\cdot i(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_L}{\mathrm{d}t}(t)$$

et

$$u_C(t)\cdot i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t)\cdot u_C(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2(t)\right) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t}(t).$$

On a donc :

$$\mathcal{P}_\mathrm{g} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L) + \mathcal{P}_\mathrm{J},$$

où $\mathcal{P}_\mathrm{g}$ est la puissance fournie par le générateur ; $\mathcal{E}_C$ est l'énergie stockée par le condensateur ; $\mathcal{E}_L$ est l'énergie emmagasinée par la bobine ; $\mathcal{P}_\mathrm{J}$ est la puissance dissipée par effet Joule par la résistance.

# 4 Résolution numérique : `scipy.integrate.odeint`

On peut très bien utiliser la méthode d'Euler pour intégrer une équation différentielle du second ordre, en se ramenant à deux équations différentielle couplées du premier ordre :

$$e(t) = LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}(t) + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) + u_C(t) \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} e(t) = Ri(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + u_C(t), \\ i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t). \end{cases}$$

Il existe beaucoup d'autres algorithmes d'intégration numérique (Crank-Nicolson, Runge-Kutta, etc.), plus robustes que la méthode d'Euler. La fonction `odeint` de la bibliothèque Python `scipy.integrate` utilise l'un d'eux et peut être utilisée pour résoudre ces équations (cf. TD E3).

`scipy.integrate.odeint(F, V0, t)`

Intègre un système d'équations différentielles du premier ordre de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t) = F(V, t), \quad \text{où} \quad V(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

`paramètres`

`F` : fonction qui donne la dérivée de $V$ en $t$ ;

`V0` : conditions initiales sur $V$ ;

`t` : liste des instants auxquels calculer $V$.

`renvoie`

`V` : tableau contenant `len(t)` vecteurs $V$, calculés aux instants de `t`.