

TD E3 – Circuits du deuxième ordre

★★★ Exercice 1 – Résolution d'équations différentielles

L'une des grandeurs électriques $x(t)$ d'un circuit vérifie l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 sans second membre.

1. Donner l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. L'écrire sous sa forme canonique.
2. La résoudre dans les cas suivants :

2.a. Pour

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ \frac{dx}{dt}(0) = 0. \end{cases}$$

2.b. Pour

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ \frac{dx}{dt}(0) = v_0. \end{cases}$$

2.c. Pour

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ \frac{dx}{dt}(0) = v_0. \end{cases}$$

3. Faire de même dans le cas où l'équation différentielle possède un second membre $\omega_0^2 X_0$.

★★★ Exercice 2 – Oscillations et facteur de qualité

On considère un circuit RLC série peu amorti, de pulsation propre ω_0 et de facteur de qualité Q . L'expression de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur est de la forme

$$u_C(t) = U_m e^{-t/\tau} \cos(\Omega t + \varphi).$$

1. Rappeler les dimensions et unités de τ et Ω . Établir leurs expressions en fonction de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q , puis en fonction de R , L et C .
2. Que peut-on dire de la pseudo-période des oscillations dans le cas où $Q \gg 1$?
3. On suppose que les oscillations restent visibles tant que leur amplitude reste supérieure à 5 % de l'amplitude initiale. Exprimer la durée $T_{5\%}$ pendant laquelle les oscillations sont visibles, en fonction de ω_0 et Q .
4. En déduire l'expression du nombre N d'oscillations observées pendant le régime transitoire en fonction du facteur de qualité.

★★★ Exercice 3 – Caractéristiques de signaux sinusoïdaux

Un signal sinusoïdal peut s'écrire sous la forme $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$. On appelle alors A l'amplitude du signal, ω sa pulsation et φ sa phase. Plus précisément φ désigne la phase initiale, ou phase à l'origine, quand le signal est écrit sous cette forme avec $A > 0$ et $\omega > 0$.

1. Donner l'amplitude, la période, la fréquence et la phase initiale des signaux suivants. Le temps est exprimé en secondes.

• $s_1(t) = 15 \cos(100\pi t + 0,5)$;

• $s_3(t) = 2 \sin(120\pi t - \frac{\pi}{4})$;

• $s_2(t) = 5 \sin(7,854 \times 10^6 t)$;

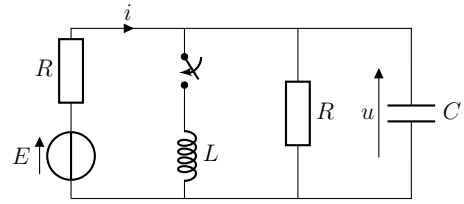
• $s_4(t) = 15 \cos(200\pi t) - 5 \sin(200\pi t)$.

Aide : pour $s_4(t)$, on pourra mettre $\sqrt{15^2 + 5^2}$ en facteur.

2. Donner la phase initiale d'un signal sinusoïdal de période T qui, à l'instant $t = \frac{T}{4}$, vaut la moitié de sa valeur maximale et est croissant.

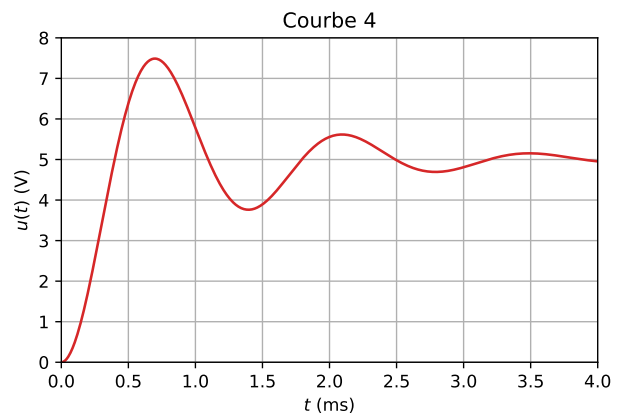
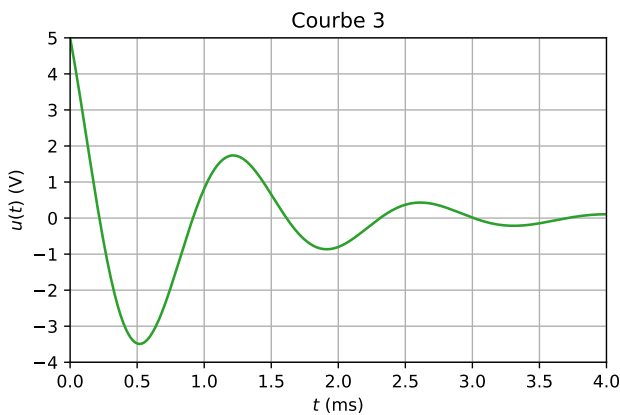
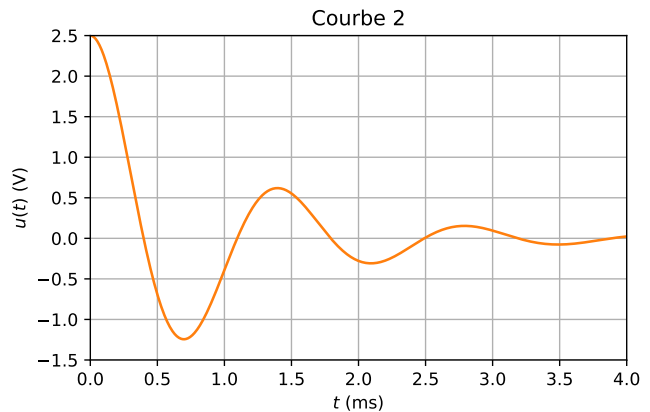
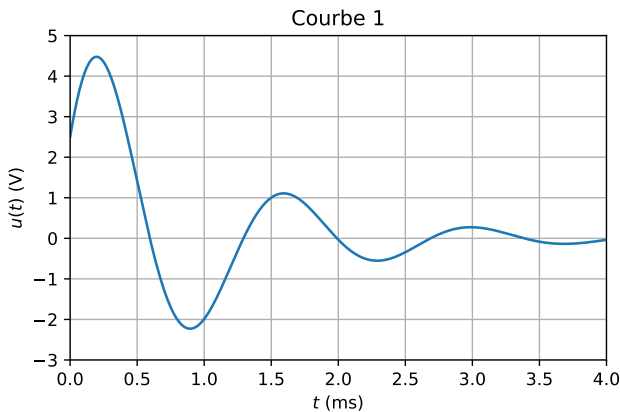
★★★ Exercice 4 – Connexion d’une bobine à un circuit RC parallèle

Le circuit représenté ci-contre est alimenté depuis très longtemps par un générateur de tension continu de f.é.m. E et de résistance interne R . À $t = 0$, on ferme l’interrupteur et on suit à l’oscilloscope l’évolution de la tension $u(t)$ aux bornes du circuit RLC parallèle ainsi obtenu.



On donne quelques valeurs : $E = 5 \text{ V}$, $R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 100 \text{ nF}$.

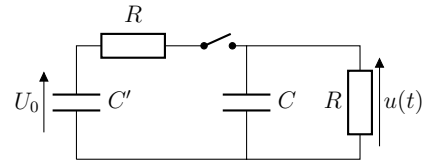
1. Donner la valeur de $u(t = 0^+)$. Justifier.
2. Donner la valeur vers laquelle doit tendre $u(t)$ en régime permanent. Justifier.
3. Montrer que $\frac{du}{dt}(t = 0^+) = 0$.
4. Établir, l’équation différentielle vérifiée par $u(t)$ après la fermeture de l’interrupteur. L’écrire sous sa forme canonique et donner l’expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q .
5. Établir une inégalité vérifiée par R , L et C pour que l’on observe un régime pseudo-périodique. On suppose cette inégalité vérifiée pour la suite.
6. Parmi les courbes représentées ci-dessous, identifier celle qui convient. Justifier.



7. Représenter l’allure de $i(t)$, sans établir ni résoudre d’équation différentielle.
8. Proposer une estimation de la valeur de l’inductance L .
9. Résoudre l’équation différentielle pour donner l’expression de $u(t)$ pour $t > 0$.

★★★ **Exercice 5 – Pont de Wien en régime transitoire**

On considère le circuit représenté ci-contre en $t = 0^-$. L'interrupteur est initialement ouvert et le condensateur C' est chargé sous une tension $U_0 = 3\text{ V}$ tandis que le condensateur C est déchargé.



La capacité des deux condensateurs est la même $C = C' = 100\text{ nF}$. On prend $R = 10\text{ k}\Omega$ et on pose $\tau = RC$. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1. Déterminer sans calcul les valeurs de la tension $u(t)$ pour $t = 0^+$ et lorsque le régime permanent est atteint, c'est-à-dire quand $t \rightarrow \infty$.
2. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $t \geq 0$ est :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{3}{\tau} \frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau^2} = 0.$$

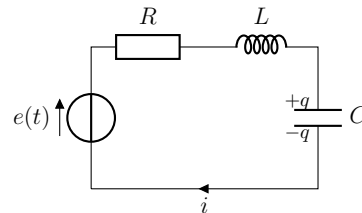
Préciser la valeur du facteur de qualité Q .

3. La résoudre pour exprimer $u(t)$ pour $t \geq 0$ et représenter graphiquement $u(t)$.
4. Déterminer l'instant t_m pour lequel $u(t)$ passe par un maximum.

★★★ **Exercice 6 – Régime pseudo-périodique**

On considère un circuit composé d'une résistance R , d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C . On soumet le circuit à un échelon de tension tel que :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0; \\ E & \text{si } t > 0. \end{cases}$$



1. Justifier qu'à $t = 0^-$, la charge q et l'intensité i sont nulles.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la charge q du condensateur pour $t > 0$. On posera $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\gamma = \frac{R}{2L}$.
3. Donner les valeurs de q et de sa dérivée première en $t = 0^+$. Justifier.
4. Donner la condition portant sur ω_0 et γ pour laquelle on observe un régime transitoire pseudo-périodique. On supposera cette condition vérifiée pour la suite.
5. Montrer que l'expression de la charge pour $t > 0$ peut se mettre sous la forme

$$q(t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))e^{-\gamma t} + D,$$

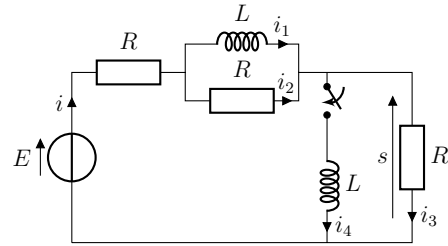
où on exprimera ω , A , B et D en fonction de C , E , ω_0 et γ .

6. Exprimer l'intensité $i(t)$ dans le circuit pour $t > 0$ en fonction de C , E , ω_0 et γ .
7. Représenter graphiquement $q(t)$ et $i(t)$. Quelles sont les valeurs atteintes après le régime transitoire? Justifier par des considérations simples.
8. Déterminer l'énergie totale W fournie par le générateur ainsi que l'énergie \mathcal{E}_{LC} emmagasinée dans la bobine et le condensateur après le régime transitoire en fonction de C et E . En déduire l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance. Ces résultats dépendent-ils du régime dans lequel se trouve le circuit? Interpréter le résultat qui apparaît quand $R \rightarrow 0$.

★★★ Exercice 7 – Circuit à deux bobines

L'interrupteur est ouvert depuis un temps très long. On le ferme à l'instant $t = 0$.

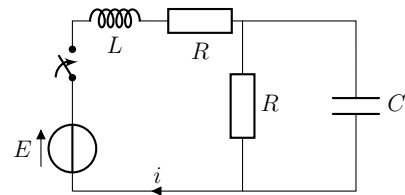
- Déterminer les intensités avant et après fermeture de l'interrupteur.
- Déterminer les intensités en régime permanent, c'est-à-dire quand $t \rightarrow \infty$.



- Relier $s(t)$ à $i_3(t)$, puis à $i_4(t)$. En déduire $i_3(t)$ et $\frac{di}{dt}$ en fonction de $R, L, s(t), \frac{ds}{dt}$ et $\frac{di}{dt}$.
- Relier $i_1(t)$ et $i_2(t)$. En déduire $\frac{di}{dt}$ en fonction de R, L, i_2 et $\frac{di_2}{dt}$.
- Montrer que $\frac{di}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt} = 0$ (on pourra s'aider d'une loi des mailles). En déduire que $i_2 = \frac{3L}{R^2} \frac{ds}{dt} + \frac{2s}{R}$.
- Trouver une EDL vérifiée par $s(t)$ et la résoudre.

★★★ Exercice 8 – Réponse d'un circuit RLC

Le circuit représenté ci-contre est alimenté par un générateur de tension continu de f.é.m. E . On suppose que l'interrupteur est ouvert depuis très longtemps. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



On suppose que $RC = L/R = \tau$. Exprimer l'intensité $i(t)$ du courant pour $t > 0$.

👍 Coups de pouce

✓ Éléments de correction

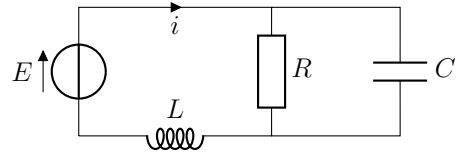
Ex. 1 1. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0$; 2.a. $x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$; 2.b. $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$; 2.c. $x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$; 3.a. $x(t) = (x_0 - X_0) \cos \omega_0 t + X_0$; 3.b. $x(t) = -X_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + X_0$; 3.c. $x(t) = (x_0 - X_0) \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + X_0$.
Ex. 2 1. $[\tau] = T, [\Omega] = T^{-1}, \tau = 2Q/\omega_0, \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}, \omega_0 = 1/\sqrt{LC}, Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$; 2. $T \approx T_0$; 3. $T_{5\%} = \frac{2Q}{\omega_0} \ln 20$; 4. $N \approx Q$.
Ex. 3 1. $A_1 = 15, T_1 = 0,02 \text{ s}, f_1 = 50 \text{ Hz}, \varphi_1 = 0,5 \text{ rad}; A_2 = 5, T_2 = 0,8 \mu\text{s}, f_2 = 1,25 \text{ MHz}, \varphi_2 = -\pi/2; A_3 = 2, T_3 = 16,7 \text{ ms}, f_3 = 60 \text{ Hz}, \varphi_3 = -3\pi/4; A_4 = \sqrt{15^2 + 5^2}, T_4 = 1 \text{ ms}, f_4 = 1 \text{ kHz}, \tan \varphi_4 = 1/3$; 2. $\varphi = -5\pi/6$.

Ex. 4 1. $u(t = 0^+) = \frac{E}{2}$; 2. $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$; 3. $\frac{du}{dt}(t = 0^+) = 0$; 4. $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, Q = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$; 5. $R > \sqrt{\frac{L}{C}}$; 6. courbe 2; 8. $L \approx 0,47 \text{ H}$; 9. $u(t) = \frac{E}{2} e^{-\mu t} (\cos \Omega t + \frac{\mu}{\Omega} \sin \Omega t), \mu = \frac{\omega_0}{2Q}, \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.
Ex. 5 1. $u(t = 0^+) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$; 2. $Q = 1/3$; 3. $u(t) = \frac{U_0}{\sqrt{5}} \left(e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2\tau} t} - e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2\tau} t} \right)$; 4. $t_m = \frac{\tau}{\sqrt{5}} \ln \left(\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \right) \approx 0,86 \text{ ms}$.
Ex. 6 2. $\frac{d^2q}{dt^2} + 2\gamma \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = CE$; 3. $q(t = 0^+) = 0, \frac{dq}{dt}(t = 0^+) = 0$; 4. $\omega > \gamma$; 5. $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, A = -CE, B = -\gamma CE / \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, D =$

CE ; 6. $i(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega} CE e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$; 7. $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = CE, \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0$; 8. $W = CE^2, \mathcal{E}_{LC} = CE^2/2 = \mathcal{E}_J$.
Ex. 7 1. $i(0^-) = i_1(0^-) = i_3(0^-) = \frac{E}{2R}, i_2(0^-) = i_4(0^-) = 0; i(0^+) = i_1(0^+) = i_3(0^+) = \frac{E}{2R}, i_2(0^+) = i_4(0^+) = 0$; 2. $i(\infty) = i_1(\infty) = i_4(\infty) = E/R, i_2(\infty) = i_3(\infty) = 0$; 3. $s = Ri_3 = L \frac{di_4}{dt}, i_3 = s/R, \frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} + \frac{s}{L}$; 4. $L \frac{di_1}{dt} = Ri_2, \frac{di}{dt} = \frac{R}{L} i_2 + \frac{di_2}{dt}$; 6. $\frac{d^2i_2}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di_2}{dt} + \omega_0^2 i_2 = 0, \omega_0 = \frac{R}{\sqrt{3L}}, Q = \sqrt{3}/4, s(t) = \frac{E}{4} \left(e^{-\frac{R}{3L} t} + e^{-\frac{R}{L} t} \right)$.
Ex. 8 $\tau^2 \frac{d^2i}{dt^2} + 2\tau \frac{di}{dt} + 2i = \frac{E}{R}, i(0^+) = 0, \frac{di}{dt}(0^+) = E/L, i(t) = \frac{E}{2R} e^{-t/\tau} \left(-\cos \frac{t}{\tau} + \sin \frac{t}{\tau} \right) + \frac{E}{2R}$.

Exercice 9 – Encore un RLC – Oral

On considère le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé. Le générateur fournit un échelon de tension, en passant de 0 à E à $t = 0$.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant i .
2. L'écrire sous forme canonique en introduisant deux grandeurs ω_0 et Q que l'on interprétera.
3. Justifier qualitativement l'expression du facteur de qualité.
4. Donner la valeur de l'intensité i et de sa dérivée à l'instant initial. Justifier.
5. En supposant $Q = 2$, donner l'expression de $i(t)$ et tracer son allure.

Exercice 10 – Résolution numérique d'une équation différentielle du deuxième ordre



Pour résoudre numériquement une équation d'ordre n , l'idée est de se ramener à un système de n équations différentielles du premier ordre, portant sur la grandeur à calculer et ses dérivées successives. Par exemple, l'équation vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur d'un circuit LC sans source s'écrit :

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0.$$

En posant $x(t) = u(t)$ et $y(t) = \frac{du}{dt}(t) = \dot{u}(t)$, cette équation peut s'écrire sous la forme d'un système de deux équations couplées du premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = y(t); \\ \frac{dy}{dt}(t) = -\omega_0^2 x(t), \end{cases}$$

ou, sous forme vectorielle avec $V(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ -\omega_0^2 x(t) \end{pmatrix} = F(V, t).$$

La résolution numérique passe par une discrétisation du temps : l'instant t devient l'instant $t_k = k\delta t$, où δt est le pas de temps utilisé, et on note $x_k = x(t_k)$ et $y_k = y(t_k)$. On peut alors calculer numériquement les valeurs de x_k et y_k en procédant par itération avec la méthode d'Euler explicite par exemple. On peut aussi utiliser la fonction `odeint`¹ de la bibliothèque `scipy.integrate`, dédiée à la résolution d'équations différentielles.

Le programme `mwe_odeint.py` donne un exemple de résolution du système précédent.

1. La fonction `odeint` a vocation à être remplacée par la fonction `solve_ivp`, plus flexible, mais aussi plus lourde à implémenter. Par ailleurs seule la fonction `odeint` est au programme.

On s'intéresse à un circuit RLC série sans source, caractérisé par sa pulsation propre ω_0 et son facteur de qualité Q .

1. Donner l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur.
2. Réécrire cette équation sous la forme de deux équations différentielles du premier ordre couplées portant sur $x(t) = u(t)$ et $y(t) = \frac{du}{dt}(t)$.
3. Écrire la fonction `oa_sans_source(V, t)` associée à ce système, où V est le vecteur défini précédemment.
4. Résoudre numériquement ce système afin d'obtenir l'évolution temporelle de $u(t)$ pour $\omega_0 = 2\pi \times 10$ Hz et $Q = 30$. On prendra $u(0) = 1$ V et $\left. \frac{du}{dt} \right|_0 = 0$.
5. Représenter graphiquement l'évolution de $u(t)$.

Le circuit est maintenant alimenté par une source idéale de tension de f.é.m. $e(t)$.

6. Reprendre les questions précédentes dans le cas où $e(t) = E \sin(\omega t)$, avec $E = 0,5$ V et $\omega = 1,25\omega_0$. Commenter l'allure de $u(t)$.
7. Mesurer la fréquence du signal en régime permanent. Commenter.
8. Les conditions initiales ont-elles un effet sur l'amplitude du signal en régime permanent ?

`scipy.integrate.odeint(F, V0, t)`

Intègre un système d'équations différentielles du premier ordre de la forme :

$$\frac{dV}{dt}(t) = F(V, t), \quad \text{où} \quad V(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

paramètres

F : fonction qui donne la dérivée de V en t ;

$V0$: conditions initiales sur V ;

t : liste des instants auxquels calculer V .

renvoie

V : tableau contenant $\text{len}(t)$ vecteurs V , calculés aux instants de t .