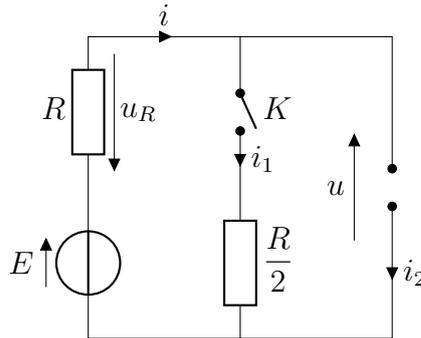


# DM05 – Electrocinetique

## Correction

### Exercice 1 – Charge ou décharge ?

- Avant la fermeture de l'interrupteur  $K$ , le régime permanent est établi. Le condensateur est alors équivalent à un interrupteur ouvert, donc le circuit en  $t = 0^-$  est équivalent à :



Les intensités  $i_1$  et  $i_2$  sont alors nulles, car les branches associées sont ouvertes. La loi des nœuds indique que l'intensité  $i$  est nulle aussi. En appliquant la loi des mailles dans la « grande maille », on obtient

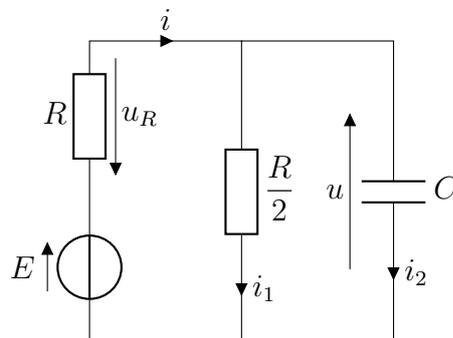
$$E = u_R + u.$$

Or  $u_R = Ri = 0$  d'après la loi d'Ohm.

On a donc finalement, en  $t = 0^-$

$$\boxed{i(0^-) = i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{u(0^-) = E.}$$

- Une fois l'interrupteur  $K$  fermé et pendant le régime transitoire, le circuit devient



La tension aux bornes d'un condensateur est continue, d'où  $u(0^+) = u(0^-) = E$ .

La résistance  $R/2$  est en parallèle du condensateur, donc la tension à ses bornes vaut  $u$ .

La loi d'Ohm en  $t = 0^+$  permet d'obtenir  $i_1(0^+) = 2E/R$ .

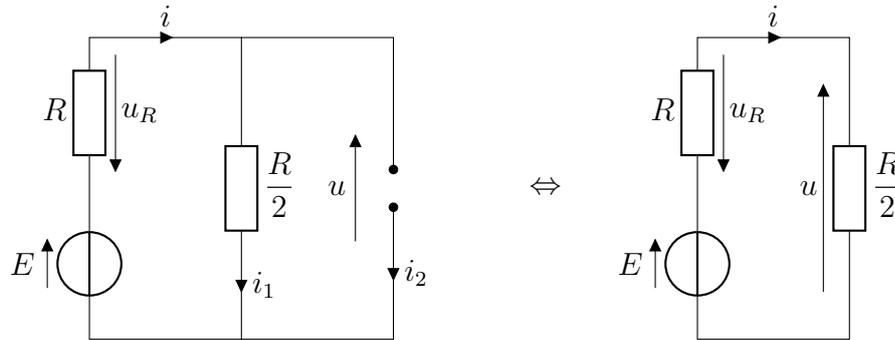
La loi des mailles permet de déterminer la tension  $u_R$ . En  $t = 0^+$ , on a donc  $u_R(0^+) = 0$  et  $i(0^+) = 0$  d'après la loi d'Ohm.

La loi des nœuds permet finalement d'obtenir  $i_2(0^+) = -i_1(0^+)$ .

On a donc finalement

$$\boxed{i(0^+) = 0, \quad i_1(0^+) = -i_2(0^+) = \frac{2E}{R}} \quad \text{et} \quad \boxed{u(0^+) = E.}$$

3. Une fois le nouveau régime permanent atteint, le circuit devient



On a alors  $i_2(\infty) = 0$  car la branche est ouverte et  $i(\infty) = i_1(\infty)$  par loi des nœuds.

On reconnaît un pont diviseur de tension, d'où  $u(\infty) = \frac{E}{3}$ .

Finalement, la loi d'Ohm donne  $i(\infty) = \frac{2E}{3R}$ .

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} i_1(t) = \frac{2E}{3R}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} i_2(t) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \frac{E}{3}.}$$

4. On raisonne sur le circuit représenté pour la question 2. La loi des nœuds donne

$$i = i_1 + i_2,$$

or :

$$i_2 = C \frac{du}{dt} \quad (\text{loi de comportement})$$

$$i_1 = \frac{2u}{R} \quad (\text{loi d'Ohm})$$

$$i = \frac{u_R}{R} = \frac{E - u}{R} \quad (\text{loi des mailles et loi d'Ohm})$$

On a donc

$$\frac{E}{RC} = \frac{3u}{RC} + \frac{du}{dt},$$

soit

$$\boxed{\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{3\tau}, \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{RC}{3}.}$$

5. On commence par trouver une solution  $u_h(t)$  à l'équation homogène :

$$u_h(t) = U_0 e^{-t/\tau}.$$

Le second membre est constant : on cherche une solution particulière  $u_p(t)$  constante.

$$u_p(t) = \frac{E}{3}.$$

La solution générale de l'équation est donc

$$u(t) = U_0 e^{-t/\tau} + \frac{E}{3}.$$

La constante  $U_0$  s'obtient à l'aide de la condition initiale en  $t = 0^+$

$$u(0) \underset{\text{sol.}}{=} U_0 + \frac{E}{3} \underset{\text{c.i.}}{=} E, \quad \text{d'où} \quad U_0 = \frac{2E}{3}.$$

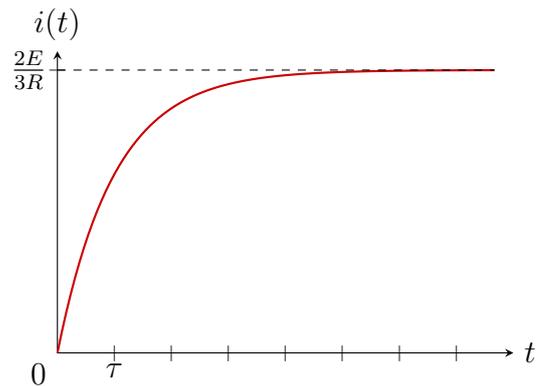
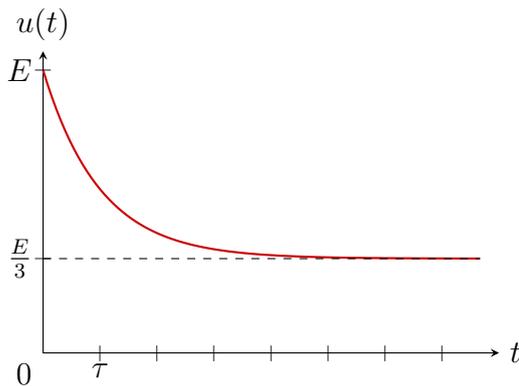
Finalement, la solution est

$$u(t) = \frac{E}{3} (1 + 2e^{-t/\tau}).$$

6. On a

$$i(t) = \frac{E - u(t)}{R} = \frac{2E}{3R} (1 - e^{-t/\tau}).$$

7. Avec les deux expressions précédentes :



8. On a

$$\Delta \mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C (u^2(\infty) - u^2(0)) = -\frac{4}{9} C E^2.$$

On obtient une valeur négative traduisant le fait que le condensateur a perdu de l'énergie : **il s'est déchargé.**

9. Le graphe ne peut pas être celui de la tension  $u(t)$ , mais il a la même allure que celui de  $i(t)$ . Avec la méthode des 63 %, on obtient

$$\tau \approx 28 \mu\text{s}.$$

La valeur aux temps longs correspond à  $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \frac{2E}{3R}$ . On lit graphiquement

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) \approx 1,7 \text{ mA}, \quad \text{d'où} \quad R \approx 2,0 \text{ k}\Omega.$$

Finalement, avec  $\tau = RC/3$ , on déduit

$$C \approx 43 \text{ nF}.$$

