DM06 – Electrocinetique
Correction

Exercice 1 – Production de tensions variables

Dans cet exercice, la résolution des équations différentielles n'est pas détaillée puisqu'il s'agit de résolutions classiques, sauf cas particulier.

1. L'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ est

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau_C} = \frac{E}{\tau_C}, \quad \text{avec} \quad \tau_C = RC.$$

Compte tenu de la condition initiale, on obtient

$$\boxed{u_C(t) = (U_0 - E)e^{-t/\tau_C} + E.}$$

L'intensité $i(t)$ s'obtient avec la loi de comportement du condensateur, d'où

$$\boxed{i(t) = \frac{E - U_0}{R}e^{-t/\tau_C}.}$$

2. On cherche t_f tel que $u_C(t_f) = U_f$. Après calcul, on obtient

$$\boxed{t_f = \tau \ln\left(\frac{U_0 - E}{U_f - E}\right).}$$

3. On a $\mathcal{P}_\mathrm{J} = Ri^2$, d'où

$$\boxed{\mathcal{P}_\mathrm{J} = \frac{(E - U_0)^2}{R}e^{-2t/\tau_C}.}$$

4. Par définition,

$$\mathcal{E}_{\mathrm{J},t_f} = \int_0^{t_f} \mathcal{P}_\mathrm{J}\mathrm{d}t.$$

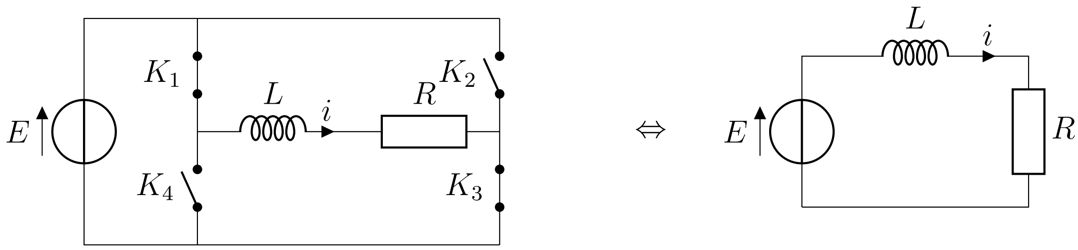
Après calcul et en utilisant l'expression de t_f obtenue précédemment, on obtient

$$\boxed{\mathcal{E}_{\mathrm{J},t_f} = \frac{C}{2}\left((U_0 - E)^2 - (U_f - E)^2\right).}$$

La puissance moyenne dissipée par effet Joule, notée $\langle\mathcal{P}_\mathrm{J}\rangle$ s'exprime donc

$$\boxed{\langle\mathcal{P}_\mathrm{J}\rangle = \frac{\mathcal{E}_{\mathrm{J},t_f}}{t_f} = \frac{(U_0 - E)^2 - (U_f - E)^2}{2R\ln\left(\frac{U_0 - E}{U_f - E}\right)}.}$$

5. Sur l'intervalle $\left[0, \frac{T}{2}\right[$, le circuit est



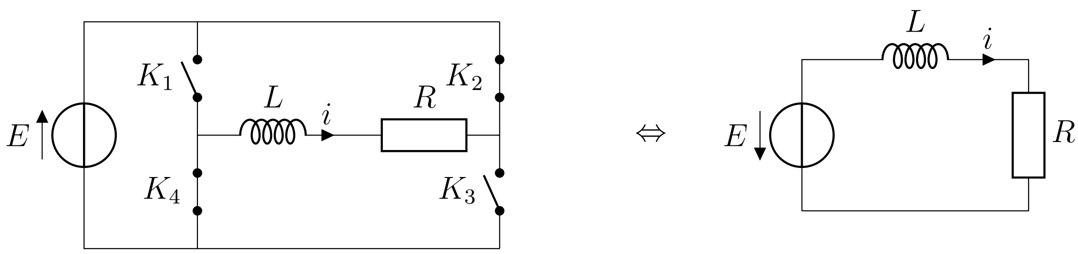
L'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ est donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}, \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}.}$$

6. Avec la condition initiale donnée, on obtient

$$\boxed{i(t) = \left(I_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-t/\tau} + \frac{E}{R}, \quad \text{pour} \quad t \in \left[0, \frac{T}{2}\right[.}$$

7. Sur l'intervalle $\left[\frac{T}{2}, T\right[$, le circuit devient



L'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ devient donc

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = -\frac{E}{L}.$$

La condition initiale est cette fois donnée en $T/2$, et non en 0. L'utilisation des conditions initiales se traduit par

$$i(t = T/2) \underset{\text{sol}^\circ}{=} A e^{-\frac{T}{2\tau}} - \frac{E}{R} \underset{\text{CI}}{=} I'_0, \quad \text{soit} \quad A = \left(I'_0 + \frac{E}{R}\right) e^{\frac{T}{2\tau}}.$$

On a donc

$$\boxed{i(t) = \left(I'_0 + \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{t - T/2}{\tau}} - \frac{E}{R}, \quad \text{pour} \quad t \in \left[\frac{T}{2}, T\right[.}$$

8. L'intensité du courant qui traverse la bobine est continue d'où, en $t = T/2$:

$$\boxed{\left(I_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{T}{2\tau}} + \frac{E}{R} = I'_0.}$$

9. Une fois le régime périodique établi, les intensités I_n et I'_n sont indépendantes de n. On généralise les expressions obtenues précédemment, de sorte que

$$\begin{cases} i(t) = \left(I_n - \dfrac{E}{R}\right)\exp\left(-\dfrac{t-nT}{\tau}\right) + \dfrac{E}{R} & \text{si } t \in \left[nT, \left(n+\dfrac{1}{2}\right)T\right[\ ; \\ i(t) = \left(I'_n + \dfrac{E}{R}\right)\exp\left(-\dfrac{t-(n+1/2)T}{\tau}\right) - \dfrac{E}{R}, & \text{si } t \in \left[\left(n+\dfrac{1}{2}\right)T, (n+1)T\right[\ ; \\ i(t) = \left(I_n - \dfrac{E}{R}\right)\exp\left(-\dfrac{t-(n+1)T}{\tau}\right) + \dfrac{E}{R} & \text{si } t \in \left[(n+1)T, \left(n+\dfrac{3}{2}\right)T\right[\ ; \\ \ldots \end{cases}$$

La continuité de $i(t)$ impose

$$\left(I_n - \frac{E}{R}\right)e^{-\frac{T}{2\tau}} + \frac{E}{R} = I'_n \quad \text{en} \quad t = \left(n+\frac{1}{2}\right)T,$$

et

$$\left(I'_n + \frac{E}{R}\right)e^{-\frac{T}{2\tau}} - \frac{E}{R} = I'_n \quad \text{en} \quad t = (n+1)\,T.$$

On doit donc résoudre le système

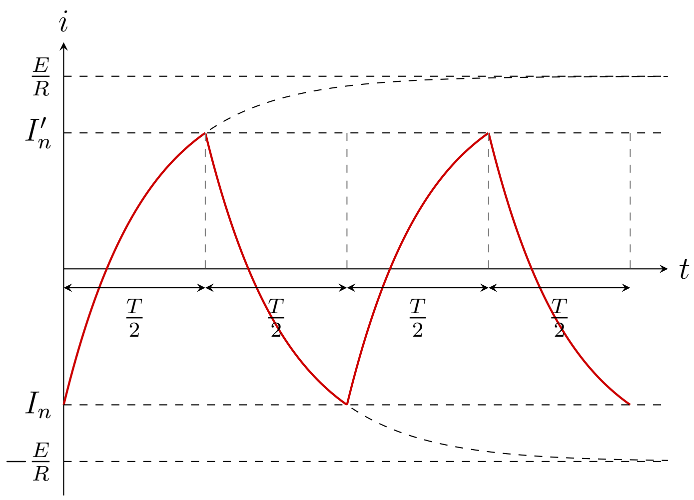
$$\boxed{\begin{cases} \left(I_n - \dfrac{E}{R}\right)e^{-\frac{T}{2\tau}} + \dfrac{E}{R} = I'_n\ ; \\ \left(I'_n + \dfrac{E}{R}\right)e^{-\frac{T}{2\tau}} - \dfrac{E}{R} = I_n, \end{cases}}$$

En sommant les deux équations, on obtient $I_n + I'_n = 0$, puis en injectant $I_n = -I'_n$ dans l'une des expressions, on obtient

$$\boxed{I'_n = -I_n = \frac{E}{R} \times \frac{1-e^{-\frac{T}{2\tau}}}{1+e^{-\frac{T}{2\tau}}}.}$$

L'amplitude des oscillations de $i(t)$ est donnée par $(I'_n - I_n)/2 = I'_n$ car $I'_n > 0$, tandis que celle des oscillations de u_R vaut RI'_n.

10. L'allure de $i(t)$ en régime établi est représentée ci-dessous.

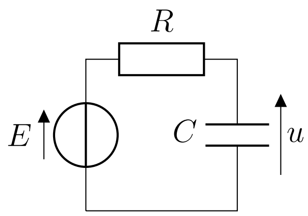


11. On cherche la valeur de L telle que

$$RI_n' = U_R \quad \text{soit, après calcul (...),} \quad \boxed{L = \frac{R}{2f\ln\left(\frac{E+U_R}{E-U_R}\right)}.}$$

A.N. : $L \approx 29\,\mathrm{mH}$.

12. Lorsque le tube est éteint, le circuit est équivalent à



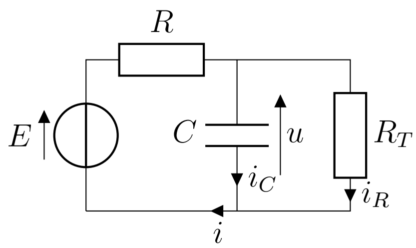
On reconnait un circuit RC avec source : la tension $u(t)$ vérifie

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau_e} = \frac{E}{\tau_e}, \quad \text{avec} \quad \tau_e = RC.}$$

La valeur asymptotique U_+ en réécrivant l'équation différentielle en régime permanent, d'où

$$\boxed{U_+ = \lim_{t\to\infty} u(t) = E.}$$

13. Lorsque le tube est allumé, le circuit devient



La loi des mailles dans la maille de gauche s'écrit $E = Ri + u$, d'où, en utilisant la loi des nœuds $E = R(i_R + i_C) + u$. En utilisant les lois de comportement, on obtient

$$E = R\left(\frac{u}{R_T} + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) + u \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau_a} = \frac{E}{\tau_e}, \quad \text{avec} \quad \tau_a = \frac{RR_TC}{R+R_T}.}$$

De même, on a

$$\boxed{U_- = \lim_{t\to\infty} u(t) = \frac{\tau_a}{\tau_e}E = \frac{R_TE}{R+R_T} < E.}$$

14. **Le condensateur se charge si le tube est éteint**, ce qui correspond aux intervalles de durée T_e. **Il se décharge lorsque le tube est allumé**, c'est-à-dire sur les intervalles de durée T_a. On en déduit, avec ce qui précède

$$\boxed{U_1 = U_- = \frac{R_TE}{R+R_T}, \quad U_2 = U_e, \quad U_3 = U_a \quad \text{et} \quad U_4 = U_+ = E.}$$

15. Sur un intervalle $[0, T_e$ où le tube est éteint : constante de temps τ_e, condition initiale U_e, valeur asymptotique E et $u(T_e) = U_a$. D'après la question 2 de l'étude préliminaire, on obtient directement

$$\boxed{T_e = \tau_e \ln\left(\frac{U_2 - U_4}{U_3 - U_4}\right) = \tau_e \ln\left(\frac{U_e - E}{U_a - E}\right).}$$

Sur un intervalle $[0, T_a[$ (on peut redéfinir une nouvelle origine des temps) où le tube est allumé : constante de temps τ_a, condition initiale U_a, valeur asymptotique U_- et $u(T_a) = U_e$. À nouveau avec la question 2, on obtient

$$\boxed{T_a = \tau_a \ln\left(\frac{U_3 - U_1}{U_2 - U_1}\right) = \tau_a \ln\left(\frac{U_a - \frac{R_T E}{R+R_T}}{U_e - \frac{R_T E}{R+R_T}}\right) \approx R_T C \ln\left(\frac{U_a}{U_e}\right),}$$

où la dernière approximation vient de $R \gg R_T$, d'où $R + R_T \approx R$.

16. Les applications numériques donnent $T_a \approx 1{,}1 \times 10^{-7}\,\mathrm{s}$ et $T_e = 24\,\mu\mathrm{s}$, d'où $T = T_a + T_e \approx T_e = 24\,\mu\mathrm{s}$ On peut donner une limite inférieure à la persistance rétinienne : elle est d'au moins $1/25^{\text{ème}}$ de seconde sinon il serait possible de voir les images individuelles d'une vidéo à 25 images par seconde. On remarque que $1\,\mathrm{s}/25 = 40\,\mathrm{ms} \gg T$: **le cycle n'est pas perceptible pour un œil humain.**

17. Avec l'étude préliminaire, on obtient quand le tube est éteint

$$\mathcal{E}_{\mathrm{J},e} = \frac{C}{2}\left((U_e - E)^2 - (U_a - E)^2\right) = 3{,}5 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}.$$

Quand le tube est allumé :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{J},a} \approx \frac{C}{2}\left(U_a^2 - U_e^2\right) = 7{,}3 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}.$$

On en déduit

$$\boxed{\langle \mathcal{P}_\mathrm{J} \rangle_e = \frac{\mathcal{E}_{\mathrm{J},e}}{T_e} = 15\,\mathrm{W}, \quad \langle \mathcal{P}_\mathrm{J} \rangle_a = \frac{\mathcal{E}_{\mathrm{J},a}}{T_a} = 4{,}9\,\mathrm{kW} \quad \text{et} \quad \langle \mathcal{P}_\mathrm{J} \rangle_{\text{tot}} = \frac{\mathcal{E}_{\mathrm{J},e} + \mathcal{E}_{\mathrm{J},a}}{T_e + T_a} = 47\,\mathrm{W}.}$$