Chapitre M1 – Cinématique du point matériel

Plan du cours

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

→ Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.

→ Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques.

→ Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.

→ Caractériser le vecteur accélération pour les mouvements suivants : rectiligne, rectiligne uniforme, rectiligne uniformément accéléré.

→ Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps et établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes dans le cas où le vecteur accélération est constant.

→ Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes dans le cas d'un mouvement circulaire.

→ Repère de Frenet : caractériser le vecteur accélération pour les mouvements suivants : circulaire, circulaire uniforme et faire le lien avec les composantes polaires de l'accélération.

Questions de cours

→ Sur un schéma, définir les bases locales associées aux repères cartésien, polaire, cylindrique, de Frenet et sphérique.

→ Établir l'expression du vecteur déplacement élémentaire dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphérique et en déduire l'expression du vecteur vitesse.

→ Donner l'expression des dérivées temporelles des vecteurs de la base cylindrique et en déduire l'expression des vecteurs vitesse et accélération.

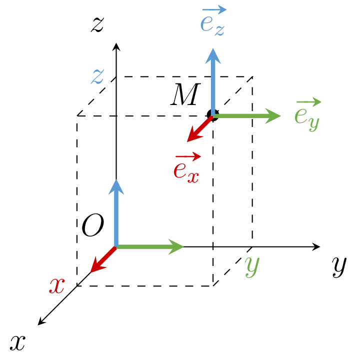
→ Dans le cas d'un mouvement circulaire, donner puis établir les composantes du vecteur accélération dans la base de Frenet à partir des expressions de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans la base polaire.

→ Établir les équations horaires et les équations de la trajectoire dans le cas d'un mouvement rectiligne, à accélération constante ou circulaire.

Documents

Document 1 – Systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes



Dans le système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

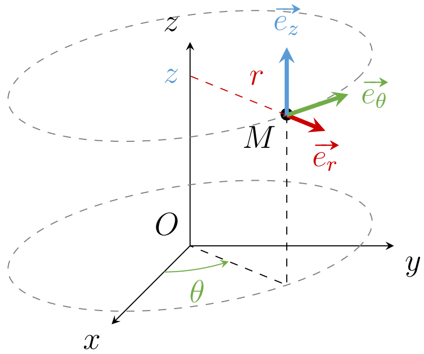
- la base de vecteurs utilisée est :

$$(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$$

- le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'exprime :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$$

Coordonnées cylindriques



Dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

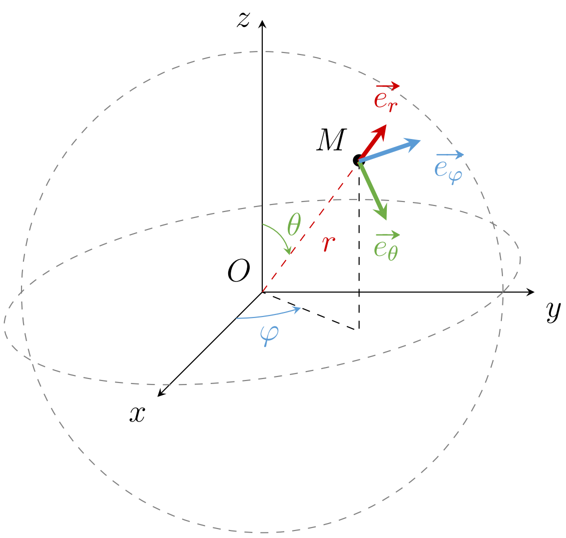
- la base de vecteurs utilisée est :

$$(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$$

- le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'exprime :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$$

Coordonnées sphériques



Dans le système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) :

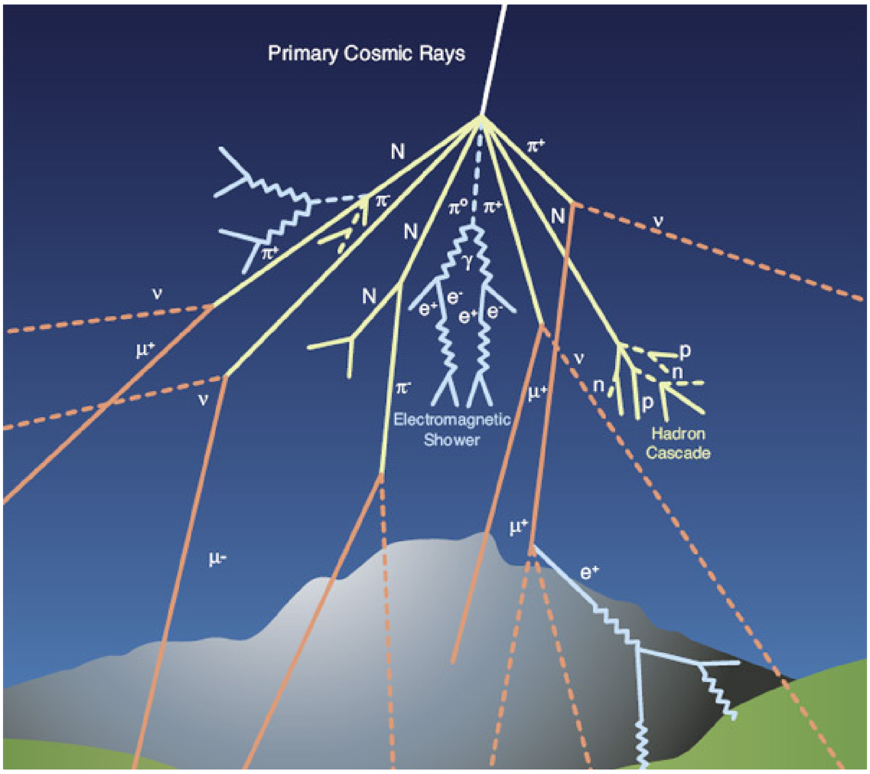
- la base de vecteurs utilisée est :

$$(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$$

- le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'exprime :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r}$$

Document 2 – Muons et relativité restreinte – Einstein (1905), Rossi et Hall (1940)



Les muons sont des particules élémentaires instables dont les propriétés physiques sont identiques à celles de l'électron, excepté pour leur masse qui est 207 fois plus grande que celle de l'électron. Ils se désintègrent rapidement : leur durée de vie moyenne est $\tau = 2{,}2\,\mu\text{s}$. Les muons sont produits dans la haute atmosphère, entre 15 et 20 km d'altitude, lorsque les rayons cosmiques, formés en grande partie de protons de très haute énergie, rencontrent les atomes d'azote et d'oxygène de l'atmosphère.

Même s'il se déplace à une vitesse proche de la vitesse de la lumière, un muon ne devrait pas parcourir une distance supérieure à $d \sim c\tau = 660\,\text{m}$ avant de se désintégrer. La probabilité de détecter un muon à faible altitude doit donc être extrêmement faible. Pourtant, au niveau du sol, on a mesuré un flux correspondant à environ un muon traversant la surface d'une main par seconde.

Du fait de leur vitesse v très élevée (certains voyagent à plus de 99 % de la vitesse de la lumière !), les effets relativistes ne sont pas négligeables :

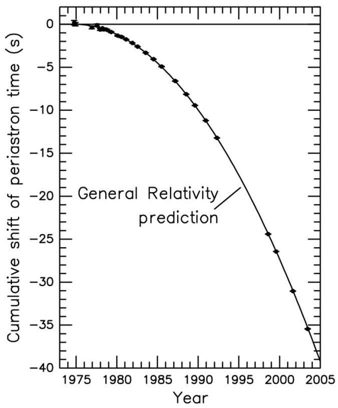
- d'une part, le temps semble s'écouler plus lentement dans le référentiel lié à un muon que dans le référentiel du laboratoire (dilatation du temps) : le temps de vie τ' mesuré dans le référentiel du laboratoire s'en retrouve allongé selon la relation $\tau' = \gamma\tau$;
- d'autre part, la distance parcourue par le muon semble plus faible dans son référentiel que la distance d' mesurée dans le référentiel du laboratoire (contraction des longueurs), selon la relation $d' = d/\gamma$.

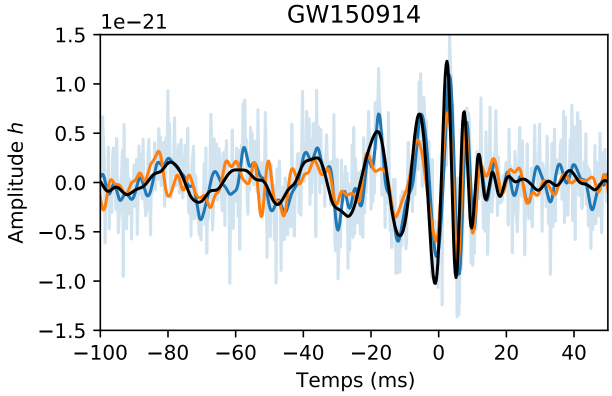
Le facteur γ est le facteur de Lorentz γ, défini par :

$$\gamma = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

dont la valeur ne diffère notablement de 1 que lorsque v devient très proche de c.

Document 3 – Ondes gravitationnelles et relativité générale – Einstein (1915), Hulse et Taylor (1993), collaboration LIGO/Virgo (2015)





PSR B1913+16 est un pulsar binaire découvert en 1974 par les physiciens Hulse et Taylor et observé durant les décennies suivantes. Il s'agit d'un système constitué de deux étoiles à neutron en orbite l'une autour de l'autre, et leurs mesures montrent une décroissance de la période orbitale (figure de gauche). Ceci indique que les deux astres se rapprochent, et donc que le système perd progressivement de l'énergie. Puisqu'il n'y a pas de frottement dans l'espace, cette dissipation ne s'explique pas avec la mécanique classique.

La relativité générale prédit que des masses accélérées émettent des ondes gravitationnelles, ces déformations de l'espace-temps qui rayonnent une partie de l'énergie du système. Les prédictions sont en excellent accord avec les mesures, ce qui prouve l'existence des ondes gravitationnelles et valide la théorie de la relativité générale. Il faut toutefois attendre le développement des interféromètres gravitationnels LIGO/Virgo, pour qu'en 2015 soient observées pour la première fois directement les ondes gravitationnelles émises lors de la coalescence de deux trous noirs (GW150914, figure de droite). Grâce à leurs mesures, Hulse et Taylor obtinrent le prix Nobel de physique en 1993, et celui de 2017 récompensa les travaux de la collaboration LIGO/Virgo.

Les manifestations de la relativité générale sont aussi observables à l'échelle du système solaire avec, par exemple, l'effet de lentille gravitationnelle vérifié dès 1919 grâce à l'observation des étoiles situées derrière le Soleil lors d'une éclipse.

Document 4 – GPS et relativité(s)

Le fonctionnement du GPS repose sur des mesures très précises d'intervalles de temps. Grâce aux horloges atomiques embarquées dans chacun des satellites du système, un utilisateur peut ainsi déterminer sa position avec une incertitude de l'ordre de 10 m. Cette précision n'est possible qu'après avoir pris en compte les effets relativistes (entre autres) :

- du fait de son mouvement rapide autour de la Terre, l'horloge du satellite est **retardée** par rapport à un observateur au sol : ce décalage, lié à la relativité restreinte, est de 7 µs par jour ;
- par ailleurs, puisque le champ gravitationnel au niveau du satellite est plus faible qu'au sol, l'horloge du satellite est **avancée** par rapport à un observateur au sol : ce décalage, lié à la relativité générale, est de 45 µs par jour.

Le temps donné par l'horloge du satellite avance donc de $\delta t = 38\,\mu\text{s}$ par jour par rapport à un utilisateur au sol. Sans correction, cela entrainerait une erreur systématique de positionnement et donc une dérive de $c\delta t = 11{,}4\,\text{km}$ par jour !

1 Description du mouvement d'un point matériel

La cinématique s'intéresse à la description du mouvement de systèmes mécaniques, à l'étude de leur trajectoire. L'étude des causes qui permettent d'expliquer ces trajectoires relève de la dynamique, qui sera abordée dans le chapitre suivant. On ne s'intéressera pour l'instant qu'à des systèmes ponctuels, c'est-à-dire à des objets dont la taille est négligeable devant les autres distances caractéristiques du problème : on parle alors de **point matériel**.

> ***Exemple :*** *Lors de l'étude du mouvement de la Terre de rayon $R_T = 6400\,\mathrm{km} \approx 10^7\,\mathrm{m}$ autour du Soleil de rayon $R_\odot = 700\,000\,\mathrm{km} \approx 10^9\,\mathrm{m}$, la taille des deux astres est négligeable devant la distance $D_{\odot T} = 1\,\mathrm{au} = 1{,}5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$ qui les sépare, ils peuvent donc être assimilés à des points matériels.*

Rq : Considérer un objet ponctuel implique une perte d'information : en particulier les déformations du système et sa rotation ne sont pas prises en compte. Certains effets ne sont pas explicables dans le cadre de cette hypothèse, comme les marées.

1.1 Référentiel

Définition

Un **référentiel** est un cadre spatio-temporel de référence pour l'étude d'un mouvement. Il est composé d'un **repère d'espace** et d'un **repère de temps**.

Le **repère d'espace**, souvent associé à un solide indéformable, est constitué :

- d'une origine par rapport à laquelle on repère la position d'un point ;
- de trois directions orthogonales repérées par trois axes orientés ;
- d'une unique unité de longueur (le mètre).

Le **repère de temps** est constitué d'une horloge parfaite, qui donne l'unité de temps (la seconde). En mécanique classique, le temps est absolu, au sens où il est le même pour tous les référentiels. En particulier, il ne dépend pas :

- de la vitesse à laquelle se déplace l'horloge ;
- de sa position dans l'espace.

> ***Exemple :*** *référentiel terrestre, référentiel géocentrique, etc.*

Limites de la description classique

La mécanique classique donne des résultats très satisfaisants tant que l'on ne s'intéresse pas à des évènements trop extrêmes, c'est-à-dire tant qu'on ne s'intéresse pas à :

- des systèmes dont la vitesse est trop grande ($v \ll c$), sinon les effets décrits par la **relativité restreinte** deviennent importants (Doc. 2) ;
- des objets trop massifs, sinon les effets décrits par la **relativité générale** (Doc. 3 et 4) deviennent importants. Même à l'échelle du système solaire ($M_\odot = 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$) ces effets restent très faibles ;
- des objets trop petits : les effets décrits par la **mécanique quantique** deviennent alors prépondérants (Chap. Q1).

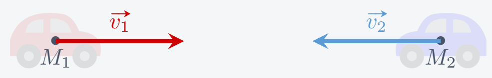
1.2 Relativité du mouvement

Expérience 1 : Lancé de ballon

https://youtu.be/j1URC2G2qnc

Application 1 – Collision entre deux véhicules

Un passant, immobile par rapport au sol, assiste à la collision (sans gravité) entre deux véhicules. Sur le constat, il représente la situation comme sur le schéma ci-contre.



Le conducteur de la voiture 1 n'est pas d'accord avec cette version : pour lui c'est la voiture 2 qui lui est rentrée dedans. Le conducteur de la voiture 2 défend la situation inverse : la voiture 1 lui est rentrée dedans.
Commenter cette situation en vous appuyant sur des schémas.

Propriété 1

La nature du mouvement dépend du référentiel choisi ! On précisera donc explicitement et systématiquement le référentiel utilisé pour l'étude.

Rq : La position dans l'espace (les coordonnées d'un point) et dans le temps (la date t d'un évènement) dépendent du référentiel choisi. Ce n'est pas le cas des distances et des intervalles de temps qui sont **indépendants du choix du référentiel** : elles sont absolues.

python De Ptolémée à Copernic

`chapM1_motion_vs_frame_of_reference.py`

1.3 Position, vitesse et accélération

La position d'un point matériel $M(t)$ à l'instant t est repérée par rapport à l'origine du repère O.

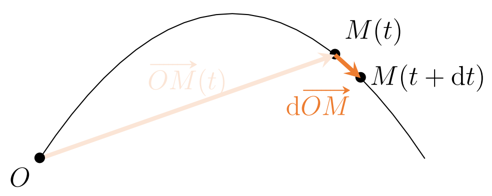
Définition

On note $\overrightarrow{OM}(t)$ le **vecteur position** de $M(t)$.

Définition

Entre deux instants infiniment proches t et $t + \mathrm{d}t$, on définit le **vecteur déplacement élémentaire** noté $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)$ ou encore $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}(t)$, comme le vecteur

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}(t) = \mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{M(t)M(t+\mathrm{d}t)}.$$



Le vecteur déplacement élémentaire traduit une **variation infinitésimale** de la position du point $M(t)$ durant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$. En effet on a

$$\overrightarrow{OM}(t+\mathrm{d}t) = \overrightarrow{OM}(t) + \mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t).$$

Rq : Le vecteur déplacement élémentaire est toujours **tangent à la trajectoire**.

Définition

On définit le **vecteur vitesse instantanée** $\vec{v}(t)$ comme le vecteur

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t).$$

Réciproquement, le vecteur déplacement élémentaire se déduit du vecteur vitesse :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t) = \vec{v}(t)\cdot \mathrm{d}t.$$

Rq : Tout comme le vecteur déplacement élémentaire, le vecteur vitesse instantanée est toujours **tangent à la trajectoire**.

Définition

Enfin, on définit le **vecteur accélération** $\vec{a}(t)$ comme le vecteur

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}(t).$$

2 Systèmes de coordonnées

Rappels de géométrie

Dans un repère orthonormé à trois dimensions $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, un vecteur est défini par ses trois coordonnées. Soient $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ deux vecteurs de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) :

$$\vec{u_1} = x_1\vec{e_x} + y_1\vec{e_y} + z_1\vec{e_z} \quad \text{et} \quad \vec{u_2} = x_2\vec{e_x} + y_2\vec{e_y} + z_2\vec{e_z}.$$

Définition

Le **produit scalaire** noté, $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}$, s'exprime

$$\vec{u_1}\cdot\vec{u_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = \|\vec{u_1}\|\,\|\vec{u_2}\|\cos\theta,$$

où θ est l'angle entre ces deux vecteurs, et $\|\vec{u_1}\|$ et $\|\vec{u_2}\|$ les normes de ces deux vecteurs.

Définition

La **norme** de $\vec{u_1}$, notée $\|\vec{u_1}\|$ est définie par

$$\|\vec{u_1}\| = \sqrt{\vec{u_1}\cdot\vec{u_1}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

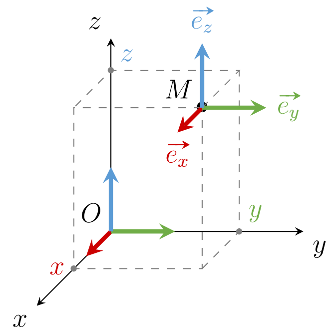
Propriété 2

Si les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont orthogonaux, alors

$$\vec{u_1}\cdot\vec{u_2} = 0.$$

2.1 Coordonnées cartésiennes

Définition



Dans le **système de coordonnées cartésiennes**, un point $M(t)$ est repéré par ses trois coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$, telles que :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\overrightarrow{e_x} + y(t)\overrightarrow{e_y} + z(t)\overrightarrow{e_z}.$$

La base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est **orthonormée directe**, c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ sont :

- **orthogonaux** deux à deux ;
- **unitaires**, c'est-à-dire de norme 1 ;
- orientés en respectant la règle de la main droite.

Cette base est **fixe** : la direction et le sens des vecteurs $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ sont constants et ne dépendent pas de la position du point M.

Rq : Pour alléger l'écriture des expressions manipulées et quand aucune ambiguïté n'est possible, on pourra parfois omettre la notation (t), de sorte que l'on notera simplement x la grandeur $x(t)$, etc.

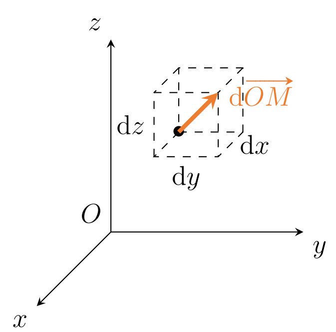
Rq : De même, on convient de noter $\dot{x}(t)$ la dérivée temporelle de $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t).$$

Propriété 3 (à démontrer)

En coordonnées cartésiennes, le **vecteur déplacement élémentaire** $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ représente le déplacement de $M(t)$ quand la coordonnée selon $\overrightarrow{e_x}$ passe de x à $x + \mathrm{d}x$, celle selon $\overrightarrow{e_y}$ de y à $y + \mathrm{d}y$ et celle selon $\overrightarrow{e_z}$ de z à $z + \mathrm{d}z$. On a

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}.$$



L'expression du vecteur vitesse instantanée se déduit du vecteur déplacement élémentaire, ou en dérivant le vecteur position, avec $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ constants.

Propriété 4 (à démontrer)

En coordonnées cartésiennes, le **vecteur vitesse instantanée** s'exprime :

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{e_x} + \dot{y}(t)\vec{e_y} + \dot{z}(t)\vec{e_z}.$$

L'accélération s'obtient en dérivant à nouveau.

Propriété 5 (à démontrer)

En coordonnées cartésiennes, le **vecteur accélération** s'exprime :

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{e_x} + \ddot{y}(t)\vec{e_y} + \ddot{z}(t)\vec{e_z}.$$

Application 2 – Trajectoire cartésienne

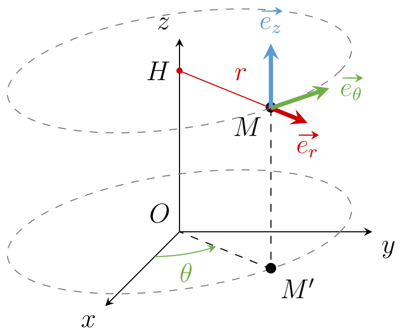
On considère un point M dont les coordonnées cartésiennes dépendent du temps, avec

$$x(t) = 2t^2, \quad y(t) = 4t + 7 \quad \text{et} \quad z(t) = t(2 - t).$$

1. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$, ainsi que sa norme.
2. En déduire l'expression du vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.
3. Calculer les coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}$, ainsi que sa norme.
4. Calculer l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'axe (Ox) à l'instant $t = 1$.

2.2 Coordonnées cylindriques

Définition



Dans le système de coordonnées cylindriques, un point $M(t)$ est repéré par ses trois coordonnées $(r(t), \theta(t), z(t))$, telles que :

- $r(t)$ est la distance du point $M(t)$ à l'axe (Oz) ;
- $\theta(t)$ est l'angle orienté de $\vec{e_x}$ vers la projection $\overrightarrow{OM'}(t)$ de $\overrightarrow{OM}(t)$ sur le plan (xOy) ;
- $z(t)$ est la cote du point $M(t)$, c'est-à-dire la distance OH, avec H le projeté orthogonal de M sur (Oz).

Dans le **système de coordonnées cylindriques**, le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ s'exprime

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{e_r} + z(t)\vec{e_z}.$$

On utilise la base orthonormée directe cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ définie comme sur le schéma ci-dessus :

- le vecteur $\vec{e_z}$ est identique à celui des coordonnées cartésiennes ;
- le vecteur $\vec{e_r}$ est orthogonal à $\vec{e_z}$ et dirigé de l'axe (Oz) vers le point M :

$$\vec{e_r} = \frac{\overrightarrow{HM}}{\left\|\overrightarrow{HM}\right\|} = \frac{\overrightarrow{HM}}{r} ;$$

- le vecteur $\vec{e_\theta}$ est choisi de manière à ce que la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ soit directe.

Rq : La base cylindrique dépend de la position du point $M(t)$. **Seul le vecteur $\vec{e_z}$ est fixe**, la direction et le sens des vecteurs $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ changent en fonction de la position de $M(t)$.

Propriété 6 (à démontrer)

Les vecteurs $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ de la base polaire ne sont pas fixes. On a :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t}(t) = \dot{\theta}\vec{e_\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{e_\theta}}{\mathrm{d}t}(t) = -\dot{\theta}\vec{e_\theta}.$$

Démo : faire un schéma, exprimer $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ en fonction de $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et θ, dériver, puis identifier.

Propriété 7 (à démontrer)

En coordonnées cylindriques, le **vecteur vitesse instantanée** s'exprime

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{z}\vec{e_z}.$$

Propriété 8 (à démontrer)

En coordonnées cylindriques, le **vecteur déplacement élémentaire** $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)$ représente le déplacement de M quand r varie de $\mathrm{d}r$, θ de $\mathrm{d}\theta$ et z de $\mathrm{d}z$:

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t) = \mathrm{d}r\vec{e_r} + r\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta} + \mathrm{d}z\vec{e_z}.$$

Démo : soit avec l'expression du vecteur vitesse, soit géométriquement. Pour la méthode géométrique, exprimer une à une les coordonnées du vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\ell_r$, $\mathrm{d}\ell_\theta$ et $\mathrm{d}\ell_z$ dans la base cylindrique en fonction de r, $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\theta$ et/ou $\mathrm{d}z$. Un schéma est indispensable pour $\mathrm{d}\ell_\theta$.

Propriété 9 (à démontrer)

Dans le système de coordonnées cylindriques, le **vecteur accélération** s'exprime

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e_\theta} + \ddot{z}\vec{e_z}.$$

Rq : Les expressions des vecteurs déplacement élémentaire, vitesse et accélération ne sont pas à apprendre par cœur. Il faut impérativement savoir les retrouver **rapidement** en partant de l'expression du vecteur position.

Application 3 – Samare

On s'intéresse au mouvement hélicoïdal d'un point situé à l'extrémité de l'ailette d'une samare (fruit de l'érable) lorsqu'elle tombe verticalement en tournoyant de sa branche.

En coordonnées cylindriques, avec R, ω et v_0 trois constantes, il est donné par :

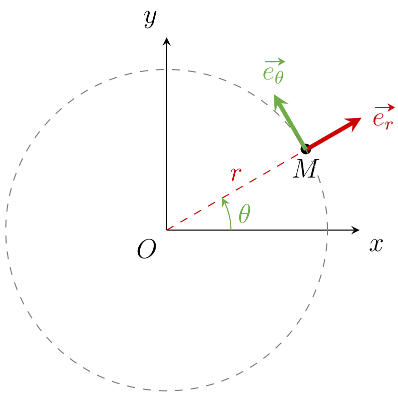
$$\begin{cases} r(t) = R \\ \theta(t) = \omega t \\ z(t) = -v_0 t \end{cases}$$

1. Donner l'expression du vecteur vitesse.
2. La vitesse est-elle constante ? Comment qualifier ce mouvement ?
3. Exprimer le vecteur accélération.

Coordonnées polaires

Dans le cas d'un mouvement circulaire plan, on peut choisir d'orienter $\vec{e_z}$ selon la direction de l'axe de rotation, de sorte que $z = \text{cste}$. En choisissant l'origine du repère cylindrique telle que $z = 0$, l'étude du mouvement se fait uniquement à l'aide des coordonnées (r, θ). On utilise alors le système de **coordonnées polaires** associé à la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$.

Définition



Dans le système de coordonnées polaires, un point $M(t)$ est repéré par ses deux coordonnées $(r(t), \theta(t))$. Le **vecteur position** $\overrightarrow{OM}(t)$ s'exprime alors

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{e_r}.$$

Propriété 10 (à démontrer)

En coordonnées polaires, les vecteurs **déplacement élémentaire** $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)$, **vecteur vitesse instantanée** $\vec{v}(t)$ et **accélération** $\vec{a}(t)$ s'expriment

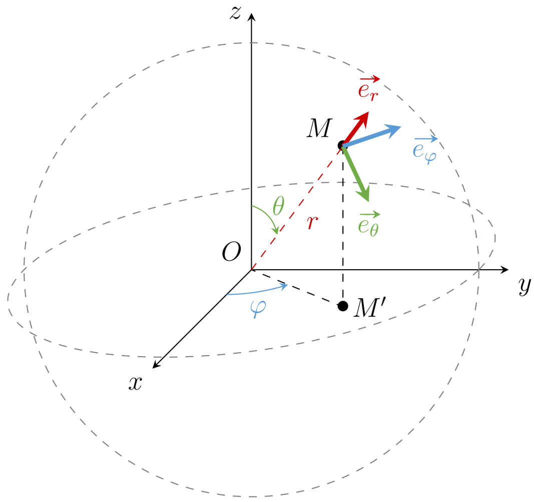
$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t) = \mathrm{d}r\vec{e_r} + r\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta}, \quad \vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

et

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e_\theta}.$$

2.3 Coordonnées sphériques

Définition



Dans le système de coordonnées sphériques, un point M est repéré par ses trois coordonnées $(r(t), \theta(t), \varphi(t))$ telles que :

- $r(t)$ est la distance OM ;
- $\theta(t)$ est l'angle orienté de $\vec{e_z}$ vers $\overrightarrow{OM}$;
- $\varphi(t)$ est l'angle orienté de $\vec{e_x}$ vers la projection $\overrightarrow{OM'}(t)$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur le plan $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y})$.

Le **vecteur position** $\overrightarrow{OM}(t)$ s'exprime alors

$$\overrightarrow{OM}(t) = r\vec{e_r}.$$

On utilise la base orthonormée directe $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ définie comme sur le schéma ci-dessus :

- $\vec{e_r}$ est un vecteur unitaire colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{OM}$:

$$\vec{e_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r} \ ;$$

- $\vec{e_\theta}$ est dans le plan $(O, \vec{e_r}, \vec{e_z})$, orthogonal à $\vec{e_r}$ et de sens donné par celui de l'angle θ ;
- $\vec{e_\varphi}$ est tel que la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ soit orthonormée directe.

Rq : Les coordonnées r et θ ne sont pas les mêmes qu'en coordonnées cylindriques ! Ici, aucun vecteur n'est fixe ce qui rend les expressions des vecteurs vitesse et accélération particulièrement lourdes. Heureusement, ces deux dernières ne sont pas à connaitre.

Propriété 11 (à démontrer)

En coordonnées sphériques, le **vecteur déplacement élémentaire** $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)$ représente le déplacement de M quand r varie de $\mathrm{d}r$, θ de $\mathrm{d}\theta$ et φ de $\mathrm{d}\varphi$:

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t) = \mathrm{d}r\vec{e_r} + r\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e_\varphi}.$$

Démo : les expressions des coordonnées $\mathrm{d}\ell_r$ et $\mathrm{d}\ell_\theta$ se retrouvent de la même façon qu'en cylindrique ; pour $\mathrm{d}\ell_\varphi$, faire un schéma et appliquer le même raisonnement que pour $\mathrm{d}\ell_\theta$.

3 Exemples de mouvements

Définition

Un mouvement est **uniforme** si la norme du vecteur vitesse est constante : $\|\vec{v}(t)\| = \text{cste}$.

3.1 Mouvement rectiligne

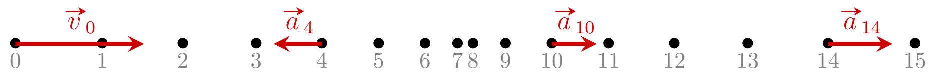
Définition

Le mouvement de $M(t)$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ est **rectiligne** si la trajectoire de $M(t)$ dans $\mathcal{R}$ est une droite.

Propriété 12

Dans le cas d'un mouvement **rectiligne** :

- la direction du vecteur vitesse instantanée $\vec{v}$ est constante ;
- le vecteur accélération $\vec{a}$ est colinéaire au vecteur vitesse instantanée, donc à la trajectoire.



Propriété 13 (à démontrer)

Si les vecteurs vitesse instantanée $\vec{v}$ et accélération $\vec{a} \neq \vec{0}$ sont de même sens, le mouvement est **accéléré**, il est **ralenti** sinon. Si $\vec{a} = \vec{0}$, le mouvement est **uniforme**.
Démo : exprimer le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{a}$ en fonction de $\|\vec{v}\|$ et étudier son signe.

Un **mouvement rectiligne uniformément accéléré** est un mouvement pour lequel le vecteur accélération $\vec{a}$ est constant et colinéaire au vecteur vitesse instantanée $\vec{v}$:

$$\vec{a} = \overrightarrow{\text{cste}} \quad \text{et} \quad \vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{v}.$$

Application 4 – Excès de vitesse

Un conducteur roule à vitesse constante $v_0 = 100\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ sur une route départementale rectiligne. Un gendarme repère l'automobiliste et démarre sa moto à l'instant $t = 0$ où la voiture passe à sa hauteur. Il accélère uniformément et atteint la vitesse de $v_1 = 90\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ au bout de $\Delta t = 10\,\text{s}$, tout en continuant à accélérer. On suppose que les véhicules se déplacent dans la direction et le sens de $\vec{e_x}$ et que le gendarme se trouve initialement à l'origine du repère.

1. Exprimer les vecteurs accélérations $\vec{a_a}(t)$ et $\vec{a_g}(t)$ de l'automobiliste et du gendarme.
2. Exprimer les distances $x_a(t)$ et $x_g(t)$ parcourues par l'automobiliste et le gendarme.
3. Exprimer, puis calculer le temps τ nécessaire au gendarme pour rattraper l'automobiliste.
4. Exprimer, puis calculer la distance D alors parcourue.
5. Exprimer, puis calculer la vitesse v_f du gendarme lors de l'interception.

3.2 Mouvement à vecteur accélération constant

Définition

On appelle **équation horaire du mouvement** l'ensemble des expressions des coordonnées du point $M(t)$ en fonction du temps $x(t)$, $y(t)$, etc.
Par ailleurs, on appelle **équation de la trajectoire** l'expression de l'une des coordonnées en fonction d'une autre : $y(x)$, etc.

Application 5 – Lancer du poids

On souhaite étudier la trajectoire du poids lancé par l'athlète américain Ryan Crouser le 18 juin 2021, qui lui a permis de battre le record du monde avec un jet à $d = 23{,}37\,\mathrm{m}$.

On assimile le projectile à un point matériel M repéré dans le repère cartésien à deux dimensions $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$ par ses coordonnées x et z, avec $\overrightarrow{e_x}$ horizontal et $\overrightarrow{e_z}$ vertical vers le haut. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, il quitte la main du lanceur à une hauteur $h = 2{,}60\,\mathrm{m}$, de sorte que $\overrightarrow{OM}(0) = h\overrightarrow{e_z}$, avec une vitesse $\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{v_0}$ formant un angle α par rapport à l'horizontale. Après le lancer, le poids est en chute libre, c'est-à-dire que son accélération est constante : $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$.

1. Faire un schéma et représenter l'allure de la trajectoire.

2. Exprimer les composantes de la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ en fonction de sa norme v_0 et de α.

3. Donner les équations différentielles vérifiées par $\ddot{x}(t)$ et $\ddot{z}(t)$.

4. Les intégrer pour obtenir les équations horaires du mouvement.

5. Les retrouver en intégrant directement le vecteur accélération, puis le vecteur vitesse pour obtenir le vecteur position.

6. En déduire l'équation $z(x)$ de la trajectoire, puis l'équation vérifiée par la portée d c'est-à-dire la distance parcourue par le projectile avant de toucher le sol.

7. Montrer que

$$d = \frac{v_0^2 \cos\alpha}{g}\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2gh}{v_0^2}}\right).$$

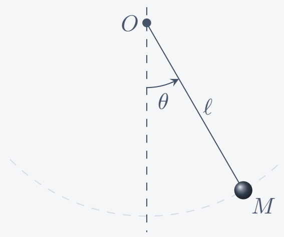
3.3 Mouvement circulaire

Définition

Le mouvement de $M(t)$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ est **circulaire** si la trajectoire de $M(t)$ dans $\mathcal{R}$ est un cercle. En coordonnées cylindriques, on a alors $r(t) = \text{cste}$.

Application 6 – Étude cinématique du pendule simple

Le mouvement d'un point matériel M accroché à un fil de longueur ℓ suspendu au point O s'inscrit sur une portion de cercle de rayon ℓ et de centre O. La position du point M est repérée par l'angle θ défini sur la figure ci-contre. Lorsque les oscillations sont de faible amplitude, on observe que $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t)$.



1. Quel système de coordonnées est le plus adapté à l'étude de ce mouvement ? Représenter, en M, la base locale associée sur un schéma.

2. Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération dans cette base.
3. Exprimer le vecteur accélération de M en fonction de l'unique composante v du vecteur vitesse et ℓ.

Définition

En coordonnées cylindriques, on appelle **vitesse angulaire** et **accélération angulaire** les quantités $\dot{\theta}(t)$ et $\ddot{\theta}(t)$.

Propriété 14 (à démontrer)

Dans le cas d'un mouvement circulaire, le mouvement est

- **uniforme** si $\dot{\theta} = \text{cste}$, c'est-à-dire si $\ddot{\theta} = 0$. L'accélération est alors **radiale**.
- **accéléré** si $\dot{\theta}\ddot{\theta} > 0$, **décéléré** sinon.

Démo : exprimer le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{a}$ en fonction de $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$, puis en fonction de $\|\vec{v}\|$.

La composante du vecteur accélération selon $\vec{e_r}$ est la **composante radiale**, ou **accélération centripète**. Celle selon $\vec{e_\theta}$ est la **composante tangentielle**, ou **orthoradiale**.

Repère de Frenet

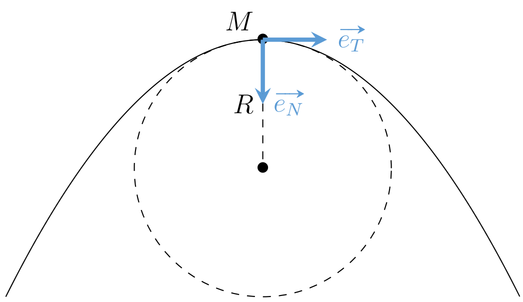
Pour l'étude des mouvements plans, on a parfois recours au **repère local de Frenet** $(M, \vec{e_N}, \vec{e_T})$:

- $\vec{e_T}$ est tangent à la trajectoire et dans le sens du mouvement ;
- $\vec{e_N}$ est orthogonal à la trajectoire et dirigé vers le centre de la courbure de la trajectoire.

Définition

Au moins localement, il est possible d'assimiler la trajectoire du point M à une trajectoire circulaire de rayon R, appelé **rayon de courbure**. Dans le **repère de Frenet**, on alors :

$$\vec{v} = v\vec{e_T} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \dot{v}\vec{e_T} + \frac{v^2}{R}\vec{e_N}.$$



Rq : Il est possible de retrouver ces expressions dans le cas d'un mouvement circulaire en passant par les coordonnées polaires, en remarquant qu'alors, $\vec{e_r} = -\vec{e_N}$ et $\vec{e_\theta} = \pm\vec{e_T}$. Attention toutefois : pour un mouvement non circulaire, cette identification entre les bases $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ et $(\vec{e_N}, \vec{e_T})$ n'est plus possible car l'origine du repère polaire ne correspond pas forcément au centre de la trajectoire.