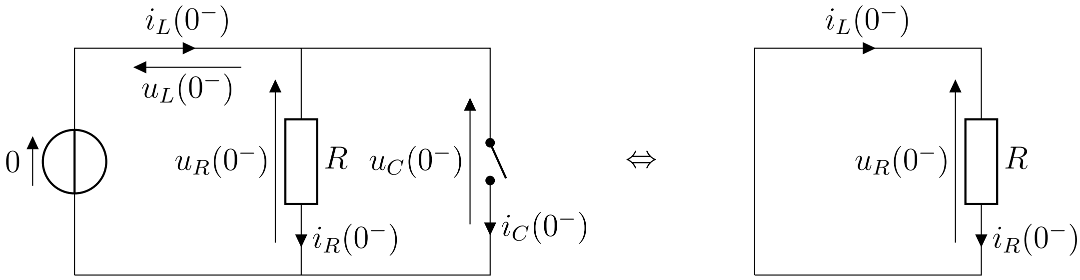
DM07 – Electrocinetique
Correction

Exercice 1 – Circuit RLC dérivation

1. La tension $u_C(t)$ et l'intensité $i_L(t)$ du courant traversant la bobine sont continues car les énergies stockée par le condensateur et emmagasinée par la bobine sont continues :

$$\mathcal{E}_C(t) = \frac{1}{2}Cu_C^2(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2}Li_L^2(t).$$

2. En $t = 0^-$ où le régime permanent est établi et avec $e(0^-) = 0$, le circuit devient



Dans le circuit de gauche, on remarque que :

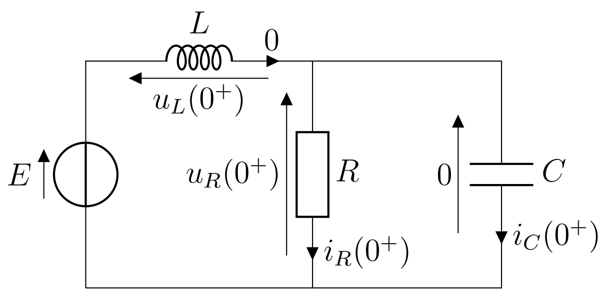
- $u_L(0^-) = 0$ car il s'agit de la tension aux borne d'un fil supposé idéal ;
- $u_C(0^-) = u_R(0^-)$ car les deux composants sont en dérivation (vrai $\forall t$) ;
- $i_C(0^-) = 0$ car il s'agit de l'intensité du courant dans une branche qui comporte un interrupteur ouvert.

Dans le circuit de droite, il devient évident que :

- $u_R(0^-) = 0$ car le circuit ne comporte pas de source ;
- $i_L(0^-) = i_R(0^-)$ d'après la loi nœuds ;
- $i_R(0^-) = 0$ d'après la loi d'Ohm.

Toutes les grandeurs électriques sont nulles en $t = 0^-$.

3. La continuité de $u_C(t)$ et $i_L(t)$ donne immédiatement $u_C(0^+) = 0$ et $i_L(0^+) = 0$. En $t = 0^+$, le circuit devient



On a :

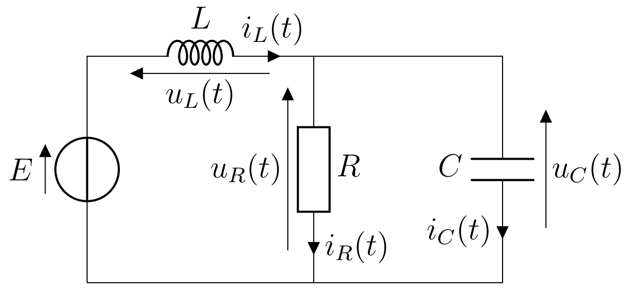
- $u_R(0^+) = 0$ car la résistance et le condensateur sont en dérivation ;

- $i_R(0^+) = 0$ par loi d'Ohm ;
- $i_C(0^+) = 0$ par loi de nœuds ;
- $u_L(0^+) = E$ par loi des mailles.

On a donc bien

$$\boxed{u_C(0^+) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = 0.}$$

4. Pour $t > 0$, le circuit devient



On commence par la loi des nœuds :

$$i_L(t) = i_R(t) + i_C(t).$$

En utilisant les lois de comportement de la résistance et du condensateur et avec $u_R(t) = u_C(t)$, on obtient

$$i_L(t) = \frac{u_C(t)}{R} + C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t).$$

On dérive ensuite de manière à faire exploiter la loi de comportement de la bobine :

$$\frac{u_L(t)}{L} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) + C\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}(t).$$

Enfin, en appliquant la loi des mailles $E = u_L(t) + u_C(t)$ pour exprimer $u_L(t)$ en fonction de $u_C(t)$, on obtient après calcul

$$\boxed{LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) + u_C(t) = E.}$$

5. Le polynôme caractéristique s'écrit

$$LCr^2 + \frac{L}{R}r + r.$$

Son discriminant vaut

$$\Delta = \frac{L^2}{R^2} - 4LC.$$

On cherche la valeur R_c de R telle que $\Delta = 0$, soit (...)

$$\boxed{R_c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}.}$$

On observe des oscillations amorties si $\Delta < 0$, c'est-à-dire si (...)

$$\boxed{R > R_c.}$$

Dans le cas limite où $R \gg R_c$, ce qui revient à $R \to \infty$, l'intensité $i_R(t)$ devient négligeable devant $i_C(t)$ et $i_L(t)$ et le circuit se rapproche d'un circuit LC. Il est donc naturel d'observer une réponse oscillante.

6. On divise l'équation différentielle par LC pour obtenir

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{LC}u_C(t) = \frac{1}{LC}E.}$$

On reconnait l'équation d'un oscillateur amorti de pulsation propre ω_0 et de facteur de qualité Q

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 E,$$

avec

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

7. Quand le régime transitoire présente des oscillations amorties, on parle de régime **pseudo-périodique**. Les racines du polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle écrite sous forme canonique sont alors complexes et s'écrivent (...)

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

On en déduit la pseudo-pulsation :

$$\boxed{\omega = |\mathrm{Im}(\mathrm{r}_\pm)| = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.}$$

On a donc $\omega < \omega_0$, d'où

$$T = \frac{2\pi}{\omega} > T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

8. En posant $\tau = 2RC$, les racines du polynôme caractéristique peuvent s'écrire

$$r_\pm = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega.$$

La solution générale de l'équation homogène s'écrit donc

$$u_{C,h}(t) = e^{-t/\tau}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right).$$

La solution particulière $u_{C,p}(t) = E$ convient, d'où la solution générale de l'équation avec second membre

$$u_C(t) = e^{-t/\tau}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right) + E.$$

La condition initiale sur $u_C(t)$ permet d'obtenir

$$A + E = 0,$$

et celle sur sa dérivée donne (...)

$$\frac{A}{\tau} = B\omega,$$

d'où (...)

$$A = -E \quad \text{et} \quad B = -\frac{E}{\omega\tau}.$$

On obtient donc finalement

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\left(\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega\tau}\sin(\omega t)\right)\right).}$$

9. Le temps caractéristique associé à la durée du régime transitoire est τ.

10. Puisque les électrons sont massifs, il ne peuvent quitter instantanément les électrodes du condensateur. La **charge q est donc conservée**.
Si l'épaisseur est divisée par deux, la capacité du condensateur est doublée d'après l'expression donnée dans l'énoncé, soit

$$C' = 2C.$$

La tension est donc divisée par deux car $q = Cu$, soit

$$u' = \frac{u}{2}.$$

Enfin l'énergie stockée par le condensateur est divisée par deux, car

$$\mathcal{E}'_C = \frac{1}{2}C'u'^2 = \frac{1}{4}Cu^2 = \frac{\mathcal{E}_C}{2}.$$