

DM08 – Mécanique

Consignes

- C1. Les consignes de présentation sont respectées (se concentrer sur l’item Présentation générale).
- C2. Les relations obtenues sont homogènes.
- C3. Les grandeurs vectorielles sont notées comme telles (surmontés d’une flèche) : pas de mélange scalaire/vecteur.
- C4. Le schéma est grand et soigné (Q. 1).
- C5. [auto-évaluation] Les expressions des vecteurs vitesse et accélération sont obtenues rapidement et sans erreur : les questions 2, 3 et 4 sont traitées en moins de 5 min.
- C6. La conséquence de l’uniformité du mouvement est correctement exprimée (Q. 7).

Exercice 1 – Mouvement hélicoïdal dans un toboggan

Dans un parc aquatique, une personne assimilée à un point matériel M repéré en coordonnées cylindriques (r, θ, z) descend un toboggan de forme hélicoïdale d’axe (Oz) vertical orienté vers le haut. L’ensemble de l’étude est réalisé dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On note g l’accélération de la pesanteur.

- RCO 1. Sur un schéma, représenter les coordonnées cylindriques du point M ainsi que les vecteurs unitaires associés à la base locale.
- RCO 2. Donner l’expression du vecteur position en coordonnées cylindriques.
- RCO 3. Établir l’expression du vecteur vitesse instantanée en coordonnées cylindriques.
- RCO 4. Établir l’expression du vecteur accélération en coordonnées cylindriques.
- 5. Lors de la descente dans le toboggan, la personne reste à une distance R constante de l’axe (Oz) . Exprimer dans ce cas les vecteurs vitesse instantanée et accélération.

Le toboggan a une forme hélicoïdale de pas H : c’est la hauteur parcourue lorsque θ varie de 2π . La personne débute sa descente d’une hauteur z_0 (l’angle θ et la vitesse sont alors nuls).

- 6. Exprimer l’altitude z de la personne en fonction de θ . En déduire l’expression du vecteur vitesse instantanée et celle du vecteur accélération en fonction notamment de θ .
- 7. À quelle(s) condition(s) le mouvement de la personne est-il uniforme ?
- 8. En l’absence de frottement, la norme du vecteur vitesse de la personne est donnée par

$$v = \sqrt{2g(z_0 - z)}.$$

Établir l’équation différentielle vérifiée par l’angle $\theta(t)$.

- 9. Dériver l’équation différentielle précédente et déterminer l’expression de $\dot{\theta}(t)$, puis de $\theta(t)$. En déduire l’expression de $z(t)$. Conclure quant à la nature de ces fonctions.

