Chapitre M2 – Dynamique du point matériel

Plan du cours

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

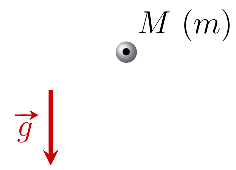
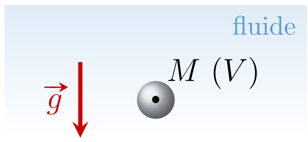
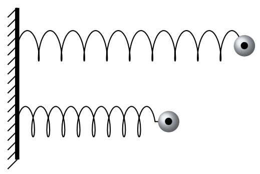
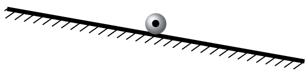
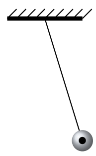
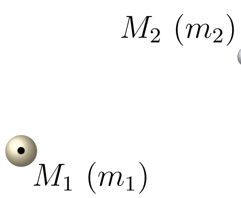
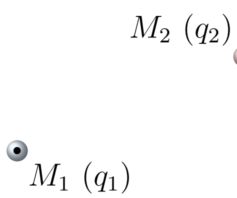
- → Justifier qualitativement la position du centre de masse d'un système, cette position étant donnée.
- → Utiliser la relation entre la quantité de mouvement d'un système et la vitesse de son centre de masse.
- → Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.
- → Discuter qualitativement du caractère galiléen d'un référentiel donné pour le mouvement étudié.
- → Établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.
- → Utiliser la deuxième loi de Newton dans des situations variées.
- → Exploiter une équation différentielle sans la résoudre analytiquement, par exemple : analyse en ordres de grandeur, existence d'une vitesse limite, écriture adimensionnée, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique.
- → Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme : établir et exploiter les équations horaires du mouvement, établir l'équation de la trajectoire.
- → Système masse-ressort sans frottement : déterminer et résoudre l'équation différentielle du mouvement, exploiter les analogies avec un oscillateur harmonique électrique.
- → Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier le caractère harmonique des oscillations de faible amplitude.

Questions de cours

- → Énoncer les lois de Newton : principe d'inertie, principe fondamental de la dynamique et principe des actions réciproques.
- → En s'appuyant sur un schéma, énoncer avec précision une des lois de force suivantes : poids, poussée d'Archimède, force de rappel associée à un ressort, tension d'un fil, réaction du support, interaction gravitationnelle, interaction électrostatique.
- → Appliquer la méthode de résolution décrite dans le document 3 pour obtenir les équations horaires du mouvement.
- → Les exemples vus en cours doivent pouvoir être traités très rapidement.

Documents

Document 1 – Forces

Force	**Schéma**	**Expression**
Poids		
Poussée d'Archimède		
Force de rappel		
Réaction du support		
Tension d'un fil		
Interaction gravitationnelle		
Interaction électrostatique		

Document 2 – Les quatre interactions fondamentales

Interaction	Particules concernées	Portée	Principales manifestations
Forte	quarks et dérivés	$\approx 10^{-15}$ m	cohésion des noyaux
Faible	constituants des noyaux	$\approx 10^{-18}$ m	radioactivité β
Électromagnétique	particules chargées	infinie	existence des atomes, réactions chimiques
Gravitationnelle	particules massiques	infinie	existence et trajectoire des astres

Document 3 – Méthode de résolution d'un exercice en dynamique

Obtention des équations du mouvement :

- **Système** : définir le $\{$système$\}$;
- **Référentiel** : choisir le référentiel, préciser son caractère galiléen (ou non : cf. MPI) ainsi que le système de coordonnées choisi ;
- **Schéma** : représenter le système à un instant *quelconque* dans le repère choisi ;
- **Bilan des forces** : les lister, les représenter sur le schéma, les exprimer dans le repère choisi ;
- **Étude cinématique** : exprimer le vecteur accélération dans le repère choisi ;
- **PFD** : l'appliquer puis le projeter selon les vecteurs de base pour obtenir les équations du mouvement.

Obtention des équations horaires du mouvement :

- **Conditions initiales** : les exprimer et les projeter dans le repère choisi ;
- **Forme générale de la solution** : l'exprimer en fonction des constantes d'intégration ;
- **Détermination des constantes d'intégration** : à écrire sous la forme

$$x(0) \underset{\text{sol}^\circ}{=} \dots \underset{\text{CI}}{=} \dots ;$$

- **Conclusion** : écrire les équations horaires sous la forme

$$\begin{cases} x(t) = \dots \\ y(t) = \dots \\ z(t) = \dots \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} r(t) = \dots \\ \theta(t) = \dots \\ z(t) = \dots \end{cases} \quad \text{ou} \dots$$

Rq : Quand cela est possible, il peut être astucieux d'intégrer vectoriellement le PFD.

Équation de la trajectoire

- exprimer t en fonction de l'une des coordonnées à partir d'une des équations horaires ;
- exprimer les autres coordonnées en fonction de la précédente en injectant l'expression de t obtenue.

1 Quantité de mouvement

1.1 Masse d'un système

La masse d'un système caractérise la manière dont le système résiste au mouvement : plus un objet est massif, plus il sera difficile de le mettre en mouvement.
Rq : On parle ici de masse inertielle, par distinction avec la masse gravitationnelle qui décrit la manière dont deux objets massifs s'attirent. Le principe d'équivalence postule l'égalité de la masse inertielle et de la masse gravitationnelle. Il permet d'expliquer l'universalité de la chute libre (cf. TD M2, Ex. 2) et reste aujourd'hui encore validé expérimentalement à mieux que 10^{-15}, grâce notamment au satellite MICROSCOPE.

Application 1 – Masse de projectiles

1. Les plombs pour la chasse du petit gibier peuvent être assimilés à des boules pleines de diamètre $D_1 = 3{,}0\,\mathrm{mm}$. Exprimer, puis calculer la masse m_1 d'un de ces plombs.
2. Pour le gros gibier, on utilise des balles cylindriques de diamètre $D_2 = 18\,\mathrm{mm}$ et de hauteur $h = 12\,\mathrm{mm}$. Exprimer, puis calculer la masse m_2 d'une de ces balles.
3. Dans chaque cas, représenter sur un schéma le centre de masse des projectiles.

Donnée : masse volumique du plomb $\rho = 11{,}4 \times 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Définition

Le **barycentre** G d'un système formé de deux points matériels M_1 et M_2 de masse m_1 et m_2 est tel que :

$$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_1\overrightarrow{GM_2} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad (m_1+m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}.$$

Ce point correspond au **centre de masse** du système.

Exemple : *Le centre de masse du système {Soleil, Terre} est ainsi situé à* $450\,\mathrm{km}$ *du centre du Soleil, dont le rayon vaut* $7 \times 10^5\,\mathrm{km}$ *: il peut donc raisonnablement être confondu avec le centre du Soleil. Le barycentre du système solaire est quant à lui situé à proximité de la surface du Soleil.*

1.2 Quantité de mouvement

Définition

La **quantité de mouvement** $\vec{p}(t)$ d'un point M de masse m et de vecteur vitesse instantanée $\vec{v}(t)$ est définie par :

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t).$$

Il s'agit d'une grandeur **additive** : la quantité de mouvement d'un système de points matériels est la somme des quantités de mouvement de chacun des points matériels.

Propriété 1

La **quantité de mouvement** $\vec{p}(t)$ d'un système de deux points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 est liée à la **vitesse instantanée du centre de masse** $\vec{v_G}(t)$:

$$\vec{p}(t) = m\vec{v_G}(t).$$

Démo : utiliser l'additivité de la quantité de mouvement puis faire apparaitre le barycentre du système.

Rq : Puisque la vitesse dépend du référentiel, la quantité de mouvement dépend du référentiel.

Application 2 – Patinage

Deux patineurs sont initialement immobiles sur la glace. Se repoussant avec leurs mains, la femme communique à son partenaire une vitesse de $10\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ par rapport à la glace. La femme a une masse $m = 52\,\mathrm{kg}$ et l'homme une masse $m' = 68\,\mathrm{kg}$. On admet que, dans cette situation, la quantité de mouvement du système {patineur + patineuse} est conservée.

1. Que peut-on dire de la vitesse du centre de masse du système {patineur + patineuse} avant et après la poussée ?
2. Déterminer la vitesse de la patineuse par rapport à la glace.
3. Déterminer la vitesse à laquelle elle semble s'éloigner de son partenaire.

2 Lois de Newton

2.1 Première loi : principe d'inertie

Définition

On dit qu'un point matériel est **isolé** s'il n'est soumis à aucune interaction avec l'extérieur.

Les interactions gravitationnelle et électrostatique ayant une portée infinie, un système rigoureusement isolé n'existe pas. En revanche, on peut trouver des systèmes pseudo-isolés qui subissent des actions de l'extérieur mais qui se compensent.

Première loi de Newton

Il existe une classe de référentiels privilégiés appelés **référentiels galiléens** dans lesquels le mouvement de tout point matériel isolé ou pseudo-isolé est rectiligne et uniforme.
Tous les référentiels galiléens sont en **translation rectiligne uniforme** les uns par rapport aux autres.

Là encore, on ne connait pas de référentiel rigoureusement galiléen. Certains référentiels pourront toutefois être supposés galiléens quand la durée de l'expérience est faible devant le temps caractéristique associé au mouvement du référentiel

Exemple : *Pour étudier le mouvement d'un pendule ordinaire dont la durée des oscillations est de l'ordre de la minute, le référentiel terrestre peut très raisonnablement être considéré comme galiléen car* $1\,\mathrm{min} \ll 24\,\mathrm{h}$*. Ce n'est pas le cas pour le pendule de Foucault du Panthéon, justement construit pour mettre en évidence la rotation de la Terre sur elle-même et dont les oscillations durent* $6\,\mathrm{h}$.

On utilisera souvent :

- le **référentiel terrestre**, lié à la surface de la Terre. Son caractère galiléen est limité par la rotation de la Terre sur elle-même. Il peut être supposé galiléen pour des expériences dont la durée reste faible devant $24\,\mathrm{h}$;
- le **référentiel géocentrique**, lié au centre de la Terre. Son origine est le centre de la Terre, et ses axes pointent vers des étoiles lointaines supposées fixes. Il peut être supposé galiléen sur des durées très inférieures à la période de révolution de la Terre autour du Soleil ($1\,\mathrm{an}$) ;

- le **référentiel héliocentrique**, lié au centre du Soleil. Son origine est le centre du Soleil et ses axes sont identiques à ceux du référentiel géocentrique. Il peut être supposé galiléen sur des durées faibles devant la période de révolution du Soleil autour du centre de la Voie lactée (230×10^6 ans).

2.2 Troisième loi : principe des actions réciproques

Il existe quatre interactions fondamentales (Doc. 2). Les interactions fortes et faibles sont négligeables à l'échelle macroscopiques. L'interaction gravitationnelle et l'interaction électromagnétique sont à l'origine des deux types de forces que l'on va considérer :

- les **forces de contact** ;
- les **forces à distance**.

Définition

Une **force** est une grandeur vectorielle qui modélise une interaction capable de modifier le mouvement d'un système ou de le déformer. Sa norme s'exprime en newton (N).

Comme toute grandeur vectorielle, elle est caractérisée par sa **direction**, son **sens** et sa **norme**. Sur un schéma, son **origine** ne peut cependant pas être quelconque : elle correspond au **point d'application de la force**.

Troisième loi de Newton

Si un système 1 exerce sur un système 2 une force $\overrightarrow{F_{1/2}}$, alors le système 2 exerce sur le système 1 une force $\overrightarrow{F_{2/1}} = -\overrightarrow{F_{1/2}}$ de mêmes intensité et direction mais de sens opposé.

2.3 Deuxième loi : principe fondamental de la dynamique (PFD)

Deuxième loi de Newton (PFD)

Dans un **référentiel galiléen**, la **somme des forces extérieures** s'exerçant sur un système est égale à la dérivée temporelle de sa **quantité de mouvement** :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_i \overrightarrow{F_i^{\mathrm{ext}}}.$$

Cette loi correspond au **principe fondamental de la dynamique** (PFD).

La somme des forces extérieures est la **résultante** des actions mécaniques extérieures subies par le système.

Cas d'un système isolé ou pseudo-isolé

Dans le cas où la résultante des actions mécaniques extérieures subies par le système est égale au vecteur nul, c'est-à-dire si

- le système est isolé, c'est-à-dire qu'il n'est soumis à aucune force ;
- le système est pseudo-isolé, c'est-à-dire que les forces qu'il subit se compensent ;

on a

$$\sum_i \overrightarrow{F_i^{\text{ext}}} = \vec{0}.$$

Propriété 2

La quantité de mouvement d'un **système isolé** ou **pseudo-isolé** est conservée :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}(t) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}(t) = \overrightarrow{\text{cste}}.$$

Cas d'un système à masse constante

Si la masse du système est constante, on a

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}(t) = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}(t) = m\vec{a}(t).$$

Propriété 3

Pour un système de **masse** m **constante**, le PFD peut s'écrire

$$m\vec{a} = \sum_i \overrightarrow{F_i^{\text{ext}}}.$$

Rq : Cette écriture du PFD est bien un cas particulier

Cas d'un système à l'équilibre

Définition

On dit qu'un système mécanique est **à l'équilibre** si son état n'évolue pas. Une position d'équilibre est dite :

- **stable** si le système y revient après que l'on en ait légèrement écarté ;
- **instable** si une perturbation tend à éloigner le système de cette position.

La quantité de mouvement d'un système à l'équilibre est nulle à tout instant, soit

$$\vec{p}(t) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}(t) = \vec{0}.$$

Propriété 4

Pour un système **à l'équilibre**, le PFD devient

$$\sum_i \overrightarrow{F_i^{\text{ext}}} = \vec{0}.$$

On parle alors du principe fondamental de la statique (PFS) : une position d'équilibre correspond à une position où la **résultante des forces extérieures est nulle**.

3 Exemples classiques

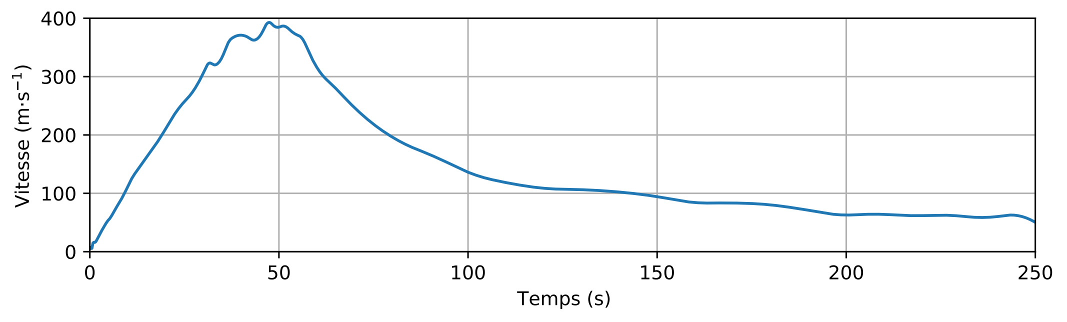
3.1 Chute libre

Définition

Un système est en **chute libre** s'il n'est soumis qu'à son poids.

Application 3 – Saut record(s) pour Felix Baumgartner (1)

En 2012, l'autrichien Felix Baumgartner établissait trois records du monde en sautant depuis une hauteur $h_0 = 39\,\text{km}$. L'évolution de sa vitesse lors de la chute est représentée ci-dessous.



On s'intéresse à la première partie de sa chute, où la pression atmosphérique est suffisamment faible pour que l'on puisse supposer que sa chute se fait dans le vide. L'instant $t = 0$ correspond au moment où F. Baumgartner se laisse tomber de la nacelle.

1. Comparer la force d'attraction gravitationnelle ressentie par le sauteur au début de sa chute et lors de son retour sur le sol. Commenter.
2. Établir soigneusement l'équation différentielle vérifiée par l'altitude $z(t)$ du sauteur.
3. La résoudre et donner les expressions de $z(t)$. Commenter l'évolution de la norme de la vitesse pendant la chute libre.
4. Déterminer graphiquement l'instant t_1 au-delà duquel l'approximation de la chute libre n'est plus raisonnable.
5. Exprimer, puis calculer sa vitesse v_1 et son altitude h_1 à l'instant t_1. Commenter.

Données : rayon de la Terre $R_T = 6370\,\text{km}$ *; constante gravitationnelle* $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

https://youtu.be/FHtvDA0W34I et https://youtu.be/raiFrxbHxV0

Expérience 1 : Chute dans le vide

https://youtu.be/KDp1tiUsZw8?t=56 et https://youtu.be/Ha0b8n5puJM.
Commenter l'universalité de la chute libre.

3.2 Chute dans un fluide

Dans un fluide, le système est soumis à de nouvelles actions de contact :

- la **poussée d'Archimède**, résultante des forces de pression exercées par le fluide ;
- des **frottements**, dont la modélisation est souvent complexe. Ils sont toujours opposés au vecteur vitesse instantanée et, dans bien des cas, on se ramènera à une expression simple où la norme de la force de frottement est proportionnelle à celle de la vitesse ou éventuellement à celle de son carré ;

Application 4 – Saut record(s) pour Felix Baumgartner (2)

À une altitude d'environ $h_2 = 2{,}5\,\mathrm{km}$, la vitesse de F. Baumgartner n'est plus « que » de $v_2 = 200\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. À un instant choisi comme nouvelle origine des dates, il ouvre son parachute. On suppose que la force de frottement fluide est proportionnelle à la vitesse : $\vec{f} = -k_1\vec{v}$.

1. Donner le signe et la dimension du coefficient k_1.
2. Comparer les intensités de la poussée d'Archimède et du poids. Commenter.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v du sauteur. On fera apparaitre une vitesse limite v_ℓ et un temps caractéristique τ.
4. Au moment où il touche le sol, la vitesse de F. Baumgartner n'est plus que de $20\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. En déduire les valeurs de k_1 et τ.

Donnée : masse de F. Baumgartner et son équipement $m = 120\,\mathrm{kg}$.

Expérience 2 : Chute dans un fluide

https://youtu.be/E43-CfukEgs.

Pourquoi la chute de la plume est-elle si différente dans l'air de la chute d'une boule de bowling ? Proposer une comparaison quantitative des forces alors mises en jeu.

Donnée : on pourra modéliser les frottements de l'air par une force de la forme $f = \frac{1}{2}\rho S C_x v^2$ *où* ρ *est la masse volumique de l'air,* S *la surface frontale de l'objet,* v *sa vitesse et* C_x *est un coefficient adimensionné proche de* 1.

Équation différentielle adimensionnée

Pour un système en chute verticale dans un fluide peu dense (poussée d'Archimède négligeable), soumis à une force de frottement linéaire en la vitesse, l'équation du mouvement s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{\tau}v(t) = \frac{v_\ell}{\tau},$$

avec v_ℓ la vitesse limite de chute et τ le temps caractéristique d'évolution de $v(t)$.

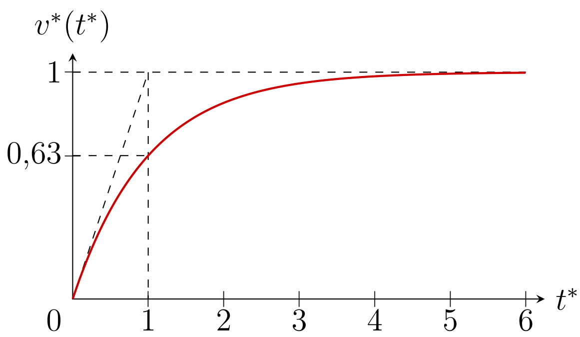
Dans le cadre de la résolution numérique d'équation différentielle, il peut être préférable de s'intéresser à la résolution de l'**équation différentielle adimensionnée**. On définit pour cela une vitesse v^* et un temps t^* adimensionnés en posant

$$t^* = \frac{t}{\tau} \text{ et } v^* = \frac{v}{v_\ell}.$$

L'équation différentielle devient (à démontrer) :

$$\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*}(t^*) + v^*(t^*) = 1,$$

et sa solution, pour une vitesse initiale nulle, est de la forme $v^*(t^*) = 1 - e^{-t^*}$.



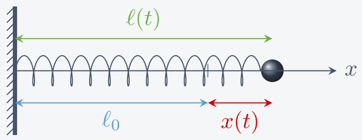
La résolution ne dépend pas des paramètres v_ℓ et τ ce qui permet de transposer les résultats à des situations variées. De plus, durant le régime transitoire, v^* et t^* restent de l'ordre de l'unité, ce qui permet d'éviter les erreurs d'arrondi qui peuvent arriver en manipulant des grandeurs très petites ou très grandes.

3.3 Système masse-ressort

Application 5 – Système modèle masse-ressort : retour de l'oscillateur harmonique

Le comportement de nombreux systèmes mécaniques oscillants, comme l'accéléromètre du TP6 ou le diapason du TP7, peut être modélisé par un système masse-ressort.

On s'intéresse à un point matériel M de masse m attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Le point M est astreint à se déplacer horizontalement, sans frottement, le long de l'axe (Ox).



1. Quelle force s'oppose à la chute (verticale) de M ?
2. Donner l'expression de la force de rappel exercée par le ressort sur M.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$, où x est l'abscisse du point M comptée à partir de la position pour laquelle le ressort est au repos.
4. La résoudre, en supposant que le point M est lâché en $t = 0$ avec une vitesse initiale nulle depuis l'abscisse X_0.
5. En remarquant la similitude avec le circuit LC, à quelle grandeur mécanique la charge $q(t)$ du condensateur est-elle analogue ? Et l'intensité $i(t)$ du courant ?
6. Poursuivre l'analogie : quelle partie du système stocke l'énergie mécanique sous une forme « statique » ? Et sous une forme « dynamique » ? Quelles grandeurs électriques s'apparentent donc à la raideur k du ressort et la masse m ? Identifier les mécanismes dissipatifs.

Le système {masse-ressort} est l'analogue mécanique du circuit LC. Il s'agit du modèle mécanique de l'oscillateur harmonique.

Propriété 5 (à démontrer)

La position $x(t)$ et la vitesse $v(t)$ d'une masse m accrochée à un ressort de raideur k vérifient l'équation d'un **oscillateur harmonique** de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

3.4 Pendule simple

Application 6 – Un oscillateur : le pendule simple

On s'intéresse au mouvement d'un point matériel M de masse m suspendu à un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable. La position du pendule est repérée par l'angle $\theta(t)$ entre le fil et la verticale.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
2. Que devient cette équation pour des oscillations de faible amplitude ? Commenter.
3. Quand cette amplitude n'est pas faible, écrire la fonction `pendule` associée à l'équation différentielle, qui permettra de la résoudre numériquement à l'aide de `odeint`.