TD M2 – Dynamique du point matériel

★☆☆ Exercice 1 – Centres de masse dans le système solaire

1. Justifier que le centre de masse du système {Soleil, Terre} peut être confondu avec le centre du Soleil.
2. Est-ce toujours le cas pour le centre de masse du système {Soleil, Jupiter} ?

	Soleil	**Jupiter**	**Terre**
Masse (kg)	2×10^{30}	2×10^{27}	6×10^{24}
Rayon de l'astre (km)	7×10^{5}	7×10^{4}	$6{,}4 \times 10^{3}$
Rayon de l'orbite (km)		8×10^{8}	$1{,}5 \times 10^{8}$

★☆☆ Exercice 2 – Un marteau sur la Lune

En 1971, les astronautes de la mission Apollo 15 se posent sur la Lune. David Scott, leur commandant, en profite pour vérifier l'hypothèse de Galilée sur la chute des corps formulée au XVII$^{\text{ème}}$ siècle en comparant les chutes d'un marteau et d'une plume. Depuis, les scientifiques de la NASA ont reproduit cette expérience sur Terre dans une chambre à vide géante.

https://youtu.be/oYEgdZ3iEKA et https://youtu.be/Ha0b8n5puJM

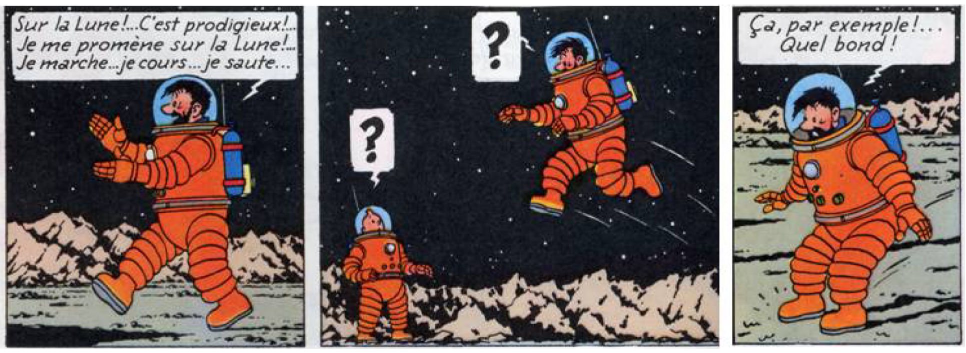
On s'intéresse à la chute d'un marteau de masse m, assimilé à son centre de masse M, après qu'il ait été lâché par un astronaute sur la Lune où l'accélération de la pesanteur est approximativement six fois plus faible que sur Terre. L'instant $t = 0$ correspond au moment où il lâche le marteau, depuis une hauteur $h_0 = 1{,}5\,\text{m}$, avec une vitesse initiale nulle.

1. En s'appuyant sur le Doc. 3 du polycopié de cours, établir l'équation différentielle vérifiée par l'altitude $z(t)$ du point M.
2. La résoudre pour obtenir l'expression de $z(t)$.
3. Exprimer la durée t_1 de la chute, et la vitesse v_1 du marteau au moment où il touche le sol. Ces deux grandeurs sont-elles différentes pour la chute d'une plume. Commenter.

Donnée : accélération de la pesanteur sur Terre $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

★★☆ Exercice 3 – Ça par exemple ! Quel bond !

Dans l'album de Tintin *On a marché sur la Lune*, le capitaine Haddock s'étonne de pouvoir faire un bond beaucoup plus grand que sur la Terre. Le but de cet exercice est de déterminer la longueur de ce bond.



On assimile le mouvement du capitaine Haddock à celui de son centre de masse. Il saute depuis le sol lunaire avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle $\alpha = 30°$ avec le sol. On note g_L l'accélération de la pesanteur à la surface de la Lune, environ six fois plus faible que sur Terre.

1. Établir l'équation horaire du mouvement.
2. En déduire l'équation de la trajectoire du centre d'inertie du capitaine Haddock.
3. Exprimer la longueur L du saut en fonction de v_0, α et g_L.
4. En supposant qu'avec sa combinaison, le capitaine Haddock est capable de sauter sur une distance $L' = 1\,\mathrm{m}$ sur Terre, exprimer, puis calculer la distance L.

★★☆ Exercice 4 – Descente à ski

Un skieur de masse m descend une piste faisant un angle α avec l'horizontale. L'air exerce une force de frottement de la forme $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ où λ est un coefficient constant positif et $\vec{v}$ la vitesse du skieur. La neige exerce sur le skieur un frottement solide de coefficient dynamique μ. On choisit comme origine de l'axe de plus grande pente (Ox) la position initiale du skieur que l'on suppose partir avec une vitesse nulle et on note (Oy) la normale à la piste. On prend $m = 80\,\mathrm{kg}$, $\alpha = 45°$ et $\lambda = 10\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$.

1. Déterminer la réaction normale $\overrightarrow{R_N}$ exercée par la neige sur le skieur. On admet que la norme de la réaction tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ vaut μR_N avec $\mu = 0{,}05$.
2. Montrer que le skieur atteint une vitesse limite v_ℓ. Calculer v_ℓ (le record du monde de vitesse en ski est d'environ $250\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$).
3. Déterminer la vitesse du skieur au cours du temps.
4. Calculer l'instant t_1 où le skieur atteint une vitesse égale à $v_\ell/2$.
5. À la date t_1, le skieur chute. On néglige alors la résistance de l'air mais le coefficient de frottement avec le sol est multiplié par 100. Calculer la distance parcourue par le skieur dans cette position avant de s'arrêter.

En réalité, la modélisation pour les frottements de l'air n'est pas pertinente. On choisit donc maintenant $\vec{f} = -KSv\vec{v}/2$. On prendra $K = 0{,}6\,\mathrm{USI}$ (USI : unité du système international) et $S = 0{,}4\,\mathrm{m^2}$.

6. Donner la dimension et l'unité de K.
7. On néglige les frottements avec la piste. Montrer que le skieur atteint une vitesse limite v'_ℓ. Est-il légitime de négliger les frottements avec la piste ?

★★☆ Exercice 5 – Deux ressorts

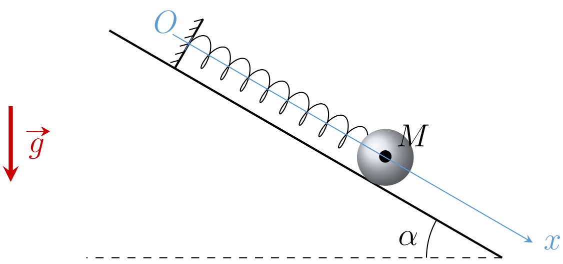
On considère un point matériel M de masse m sur un plan horizontal liée à deux ressorts de longueurs à vide $\ell_{1,0}$ et $\ell_{2,0}$ et de constantes de raideur k_1 et k_2. Chaque ressort est fixé de son autre extrémité à un mur, la distance entre les deux murs est $L = \ell_{1,0} + \ell_{2,0}$.

1. Déterminer la position d'équilibre de la masse. On y prendra l'origine des coordonnées.
2. Obtenir l'équation du mouvement du point M. La résoudre pour une vitesse initiale v_0, la position initiale étant la position d'équilibre.
3. Ce système est-il équivalent à un système masse-ressort unique ? Donner le lien entre les raideurs des ressorts et le ressort équivalent. Commentaire.

4. Si $L < \ell_{1,0} + \ell_{2,0}$, quelle est la position d'équilibre ? Cela affecte-t-il la dynamique du mouvement ? Même question si $L > \ell_{1,0} + \ell_{2,0}$.

★★☆ Exercice 6 – Oscillations sur un plan incliné

Une masse m, assimilée à un point matériel M, est attachée à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. Elle glisse sans frottements sur le sol qui est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On repère la position de M sur le sol par l'abscisse $x = OM$ (O étant le point de fixation du ressort).



À l'instant $t = 0$, la masse m est à la position $x(t = 0) = x_0 > 0$ et sa vitesse est nulle.

1. Déterminer la position d'équilibre, commenter.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
3. La résoudre pour obtenir l'expression de $x(t)$, tracer le graphe.
4. Que devient l'équation du mouvement en présence de frottements fluides de la forme $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$, avec $\lambda > 0$? Commenter suivant la valeur de λ.

★★☆ Exercice 7 – Chaussette dans un sèche-linge

On modélise le tambour d'un sèche-linge par un cylindre de rayon $R = 25\,\text{cm}$ tournant à $50\,\text{tours/min}$. On s'intéresse au mouvement d'une chaussette, assimilée à un point matériel M de masse m. Pendant une première phase du mouvement, la chaussette est entrainée par le cylindre dans un mouvement de rotation uniforme à la même vitesse que le tambour.

1. Déterminer l'accélération de la chaussette.
2. En déduire la réaction du tambour sur la chaussette.
3. Montrer que la réaction normale s'annule lorsque la chaussette atteint un point dont on déterminera la position angulaire.
4. Que se passe-t-il en ce point ? Quel est le mouvement ultérieur ?

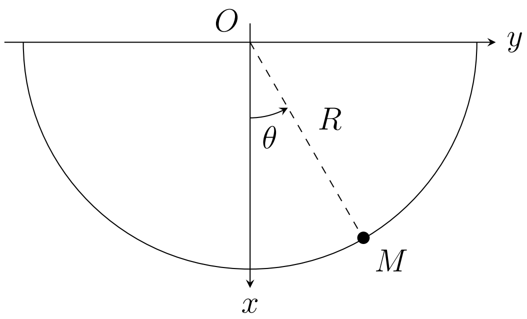
★★☆ Exercice 8 – Glissade sur un igloo

Un enfant modélisé par un point matériel M de masse m glisse sans frottement sur un igloo hémisphérique de rayon R. La position de l'enfant est repérée par son angle $\theta(t)$ par rapport à la verticale. Initialement, l'enfant est en θ_0 et sa vitesse est nulle.

1. Faire un schéma du système sur lequel on fera apparaitre le repère cartésien (O, x, y, z), tel que θ soit l'angle de rotation autour de $\vec{e_z}$, la base polaire mobile $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$, ainsi que les forces subies par l'enfant.
2. Écrire le PFD et le projeter sur la base polaire.
3. Intégrer l'une des deux équations obtenues afin d'en déduire une relation entre $\dot{\theta}$ et θ.
   Indication : multiplier l'une des équations par $\dot{\theta}$.
4. En déduire l'expression de la réaction normale de l'igloo en fonction de θ.
5. L'enfant décolle-t-il ? Si oui, pour quel angle ? Commenter.

★★☆ Exercice 9 – Oscillations d'un anneau

Un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, est astreint à se déplacer sans frottement le long d'une tige formant un arc de cercle de rayon R, situé dans le plan vertical (Oxy). La position de M est repérée par l'angle θ entre (Ox) (vertical) et $\overrightarrow{OM}$. À l'instant $t = 0$, on lâche M (avec une vitesse initiale nulle) d'un angle θ_0.



1. Appliquer la deuxième loi de Newton et la projeter dans la base polaire.
2. Établir une expression de $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ, en intégrant l'une de ces projections (que l'on devra d'abord multiplier par $\dot{\theta}$).
3. En déduire l'expression de la réaction du support en fonction de θ et des données du problème.
4. Déterminer la position θ_1 pour laquelle cette réaction est maximale.
5. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ, en supposant que θ reste petit au cours du mouvement.
6. Donner l'expression de $\theta(t)$.

★★★ Exercice 10 – Jeux aquatiques

Un baigneur de masse $m = 80\,\mathrm{kg}$ saute d'un plongeoir situé à une hauteur $h = 10\,\mathrm{m}$ au-dessus de la surface de l'eau. On considère qu'il se laisse chuter avec une vitesse initiale nulle et qu'il est soumis uniquement à la force de pesanteur durant la chute. On prendra $g = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. On note (Oz), l'axe vertical descendant, O étant le point de saut.

1. Déterminer la vitesse v_e d'entrée dans l'eau ainsi que le temps de chute t_c. Faire les applications numériques.

Lorsqu'il est dans l'eau, le baigneur ne fait aucun mouvement. Il subit, en plus de la pesanteur :

- une force de frottement $\vec{f} = -k\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse du plongeur et $k = 250\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$;
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -m\vec{g}/d_h$, où $d_h = 0{,}9$ est la densité du corps humain.

2. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse en projection sur (Oz), notée v_z. On fera apparaitre une constante de temps τ dont on donnera l'expression en fonction des données du problème.
3. Intégrer cette équation en prenant comme nouvelle origine des temps $t = t_c$.
4. Déterminer la vitesse limite $v_L < 0$ en fonction de m, k, g et d_h. Faire l'application numérique.
5. Exprimer la vitesse v_z en fonction de v_e, $|v_L|$ et t. Déterminer à quel instant t_1 le baigneur commence à remonter.
6. En prenant la surface de l'eau comme nouvelle origine de l'axe (Oz), exprimer $z(t)$. En déduire la profondeur maximale pouvant être atteinte.

7. En fait, il suffit que le baigneur arrive au fond de la piscine avec une vitesse de l'ordre de $v_2 = 1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ pour qu'il puisse se repousser avec ses pieds sans risque : à quel instant t_2 atteint-il cette vitesse et quelle est la profondeur minimale du bassin ?

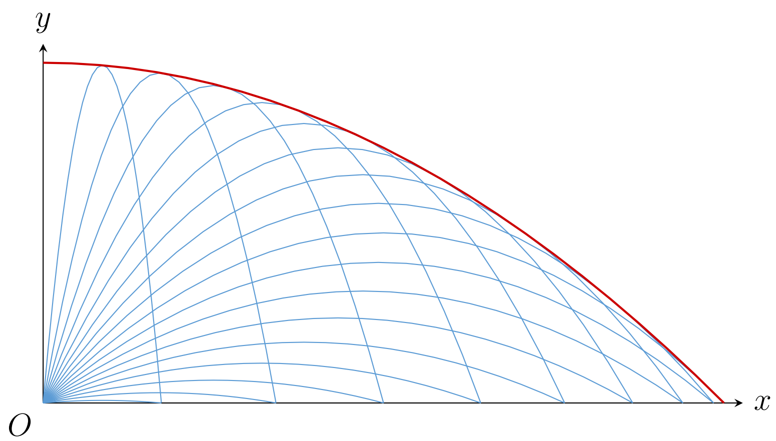
★★★ Exercice 11 – Parabole de sûreté

On s'intéresse au mouvement d'un boulet de canon de masse m tiré depuis l'origine du repère à l'instant $t = 0$. Le canon lui donne une vitesse initiale v_0 dans une direction formant un angle α avec l'horizontale. On suppose que les frottements de l'air sont négligeables et on note g l'accélération de la pesanteur.

1. Déterminer l'équation $y(x)$ de la trajectoire.
2. Exprimer la portée d du tir, c'est-à-dire l'abscisse maximale atteinte par le projectile, quand il touche le sol. Pour quelle valeur de α est-elle maximale ?
3. Exprimer l'altitude maximale atteinte par le boulet, en fonction de α et v_0.
4. Montrer que l'équation de la trajectoire peut se mettre sous la forme :

$$y = -\frac{x^2}{4h} - \frac{x^2}{4h}\tan^2\alpha + x\tan\alpha,$$

   où on donnera l'expression et l'interprétation de h.
5. À quelle condition un point de coordonnées (x, y) peut-il être atteint ? En déduire que, pour une vitesse v_0 donnée, tous les tirs possibles sont contenus sous une parabole, appelée parabole de sûreté, dont on donnera l'équation.



Coups de pouce

Ex. 1 Où se trouve le barycentre des différents systèmes ?
Ex. 3 4. Que vaut v_0 ?
Ex. 4 1. Y a-t-il un mouvement selon (Oy) ? Que donne la projection du PFD sur cet axe ?
Ex. 5 1. Que donne le PFS ? 3. Quelle est la pulsation propre d'un système masse-ressort ?
Ex. 6 1. Vérifier que l'expression est cohérente : que devient-elle si $\alpha = 0$? si le ressort est très raide ? si la masse est importante ? 4. De l'oscillateur harmonique à l'oscillateur amorti...
Ex. 7 1. Il s'agit d'un mouvement circulaire uniforme. 2. Écrire le PFD et le projeter sur $\overrightarrow{e_r}$.

Ex. 8 3. Cf. Ex. 9. 5. Que vaut la réaction normale lorsque l'enfant décolle ?

Ex. 9 2. Quelle est la primitive de $\dot\theta\ddot\theta$? Attention aux bornes d'intégrations, ou aux conditions initiales.

Ex. 10 1. Le plongeur est en chute libre. 5. Que vaut $v_z(t_1)$? 6. Il n'y a qu'à intégrer en faisant attention aux conditions initiales.

Ex. 11 4. $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$. 5. Poser $X = \tan\alpha$: à quelle condition le polynôme en X admet-il au moins une solution réelle ?

✓ Éléments de correction

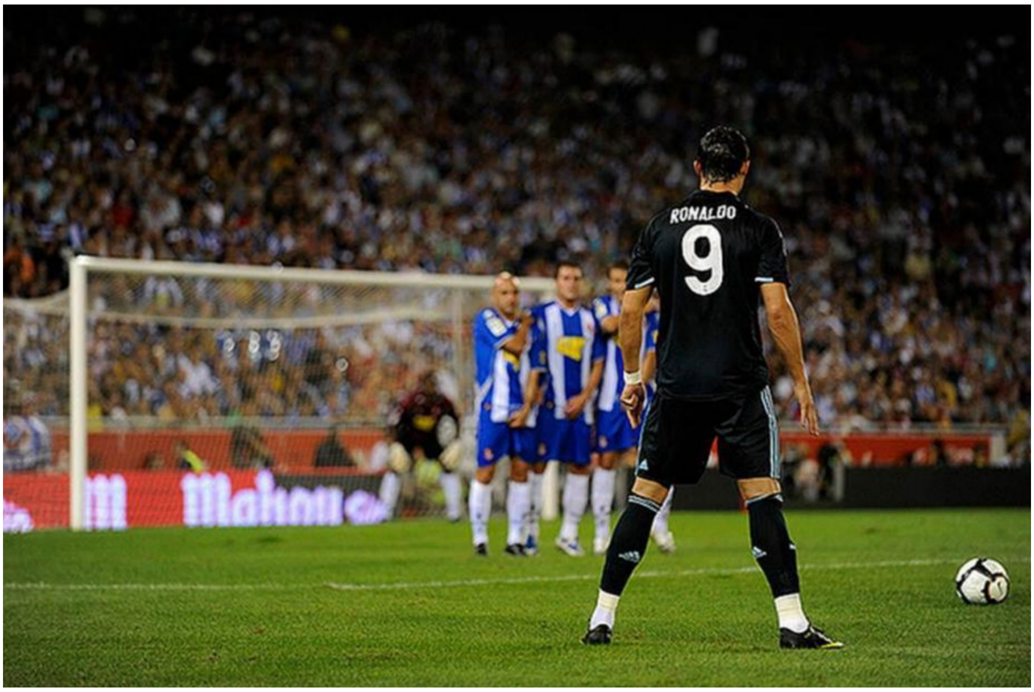
Ex. 1 1. $GS = \frac{M_T}{M_S+M_T} D_{TS} = 450\,\text{km}$; 2. $G'S = \frac{M_J}{M_S+M_J} D_{JS} = 8\times 10^5\,\text{km}$.
Ex. 2 1. $\ddot z = -g/6$; 2. $z(t) = -gt^2/12 + h_0$; 3. $t_1 = \sqrt{12h_0/g} = 1{,}35\,\text{s}$, $v_1 = gt_1/6 = 2{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
Ex. 3 1. $x(t) = v_0 t\cos\alpha$, $z(t) = -g_L t^2/2 + v_0 t\sin\alpha$; 2. $z(x) = -\frac12 g_L \frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha$; 3. $L = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g_L} = \frac{6v_0^2\sin 2\alpha}{g}$; 4. $L' = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} = L/6$, $L = 6L' = 6\,\text{m}$.
Ex. 4 1. $R_N = mg\cos\alpha$; 2. $v_\ell = \frac{mg}{\lambda}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 190\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$; 3. $v(t) = v_\ell(1-e^{-t/\tau})$, $\tau = m/\lambda$; 4. $t_1 = \tau\ln 2 = 5{,}5\,\text{s}$; 5. $d = -\frac{v_\ell^2}{8g(\sin\alpha - 100\mu\cos\alpha)} = 12{,}5\,\text{m}$; 6. $[K] = \text{M}\cdot\text{L}^{-3}$; 7. $v'_\ell = \sqrt{\frac{mg\sqrt2}{KS}} = 245\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. $\left|\overrightarrow{f}\right| = 1{,}1\,\text{kN} \gg \left|\overrightarrow{R_T}\right| = 28\,\text{N}$.

Ex. 5 1. $\ell_{1,\text{éq}} = \ell_{1,0}$; 2. $\ddot x + \omega_0^2 x = 0$, $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$; 3. $k_{\text{éq}} = k_1 + k_2$; 4. $\ell_{1,\text{éq}} = (k_1\ell_{1,0} + k_2(L-\ell_{2,0}))/(k_1+k_2)$.
Ex. 6 1. $x_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}\sin\alpha$; 2. $\ddot x + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$; 3. $x(t) = (x_0 - x_{\text{éq}})\cos\omega_0 t + x_{\text{éq}}$; 4. $\ddot x + \frac{\omega_0}{Q}\dot x + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$, $Q = \sqrt{mk}/\lambda$.
Ex. 7 avec θ repéré par rapport à la verticale : 1. $\overrightarrow{a} = -R\omega^2\overrightarrow{e_r}$, $\omega = \frac{2\pi\times 50}{60} \approx 5{,}2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$; 2. $\overrightarrow{R} = mg\left(-(\cos\theta + \frac{R}{g}\omega^2)\overrightarrow{e_r} + \sin\theta\overrightarrow{e_\theta}\right)$; 3. $\theta = \arccos\left(-\frac{R\omega^2}{g}\right) = 134°$.
Ex. 8 2. $-mR\dot\theta^2 = R_N - mg\cos\theta$, $mR\ddot\theta = mg\sin\theta$; 3. $\dot\theta = \sqrt{\frac{2g}{R}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$; 4. $R_N = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$; 5. $\theta = \arccos\left(\frac23\cos\theta_0\right)$.

Ex. 9 1. $-mR\dot\theta^2 = -R_N + mg\cos\theta$, $mR\ddot\theta = -mg\sin\theta$; 2. $\dot\theta^2 = \frac{2g}{R}(\cos\theta - \cos\theta_0)$; 3. $\overrightarrow{R_N} = -mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)\overrightarrow{e_r}$; 4. $\theta_1 = 0$; 5. $\ddot\theta + \omega_0^2\theta = 0$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$; 6. $\theta(t) = \theta_0\cos\omega_0 t$.
Ex. 10 1. $t_c = \sqrt{2h/g} \approx 1{,}4\,\text{s}$, $v_e = \sqrt{2gh} \approx 14\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; 2. $\dot v_z + \frac{v_z}{\tau} = \frac{g}{d_h}(d_h - 1)$, $\tau = m/k = 0{,}32\,\text{s}$; 3. $v_z(t) = (v_e - v_L)e^{-t/\tau} + v_L$; 4. $v_L = \frac{mg}{kd_h}(d_h - 1) \approx -0{,}36\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; 5. $v_z(t) = (v_e + |v_L|)e^{-t/\tau} - |v_L|$, $t_1 = \tau\ln\left(1 + \frac{v_e}{|v_L|}\right) \approx 1{,}2\,\text{s}$; 6. $z(t) = \tau(v_e + |v_L|)\left(1 - e^{-t/\tau}\right) - |v_L|t$, $z_{\max} = 4{,}1\,\text{m}$; 7. $t_2 = \tau\ln\left(\frac{v_e + |v_L|}{v_2 + |v_L|}\right) \approx 0{,}76\,\text{s}$, $z_{\min} \approx 3{,}9\,\text{m}$.
Ex. 11 1. $y(x) = -\frac12 g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha$; 2. $d = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$; 3. $y_{\max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$; 5. $y = h - \frac{x^2}{4h}$.

Exercice 12 – Coup franc – Résolution de problème

Le 8 décembre 2009, Cristiano Ronaldo marque un coup franc de 33 m face à Marseille. Le ballon passe au-dessus du mur, situé à 9,15 m du tireur, pour aller se retrouver dans la lucarne (sous la barre transversale du but, à 2,44 m de hauteur).



Proposer une estimation de la vitesse du ballon lors du tir de Ronaldo.

Exercice 13 – Bille dans un liquide – Oral

On considère une bille, de masse m et de rayon R, plongée dans un liquide de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ. La bille est suspendue à une ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Elle subit de la part du liquide une force de frottement fluide donnée par la loi de Stokes, $\overrightarrow{f} = -6\pi\eta R\overrightarrow{v}$, en plus de la poussée d'Archimède. La bille est animée d'une vitesse $\overrightarrow{v}$. Dans le liquide, sa pseudo-période d'oscillation est alors T. Dans l'air, où les frottements sont négligeables, sa période d'oscillation est T_0.

1. Soit ℓ_e la longueur à l'équilibre du ressort. Exprimer ℓ_e en fonction des données du système.
2. On note z l'allongement du ressort par rapport à sa position d'équilibre. Montrer que z vérifie une équation différentielle de la forme :

   $$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = 0,$$

   et exprimer λ et ω_0.
3. À quelle condition, liant ω_0 et λ, obtient-on des oscillations ?
4. Déterminer dans ce cas la période T des pseudo-oscillations.
5. Donner l'expression de η en fonction des caractéristiques de la sphère, de T et T_0. En déduire un protocole expérimental pour mesurer η.

python Exercice 14 – Équation transcendante

On s'intéresse à la chute d'un point matériel M de masse m en présence de frottements fluides $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. À l'instant initial, le point M est lâché sans vitesse initiale depuis une hauteur h. La position du point M est repérée sur un axe (Oz) **orienté vers le bas** et dont l'origine est située au niveau du sol.

1. Montrer que la position z du point matériel s'exprime :

$$z(t) = v_l t + v_l \tau (e^{-\frac{t}{\tau}} - 1) - h, \text{ où } v_l = \frac{mg}{\alpha} \text{ et } \tau = \frac{m}{\alpha}.$$

2. En déduire une équation vérifiée par la durée Δt de la chute.

Cette équation est dite transcendante et n'admet pas de solution analytique. Il est possible de la résoudre graphiquement, ou numériquement.

3. Représenter graphiquement $z(t)$ avec Python. On choisira $v_l = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\tau = 1\,\mathrm{s}$ et $h = 1\,\mathrm{m}$.
4. Proposer un encadrement tel que $t_1 < \Delta t < t_2$.
5. Résoudre numériquement l'équation obtenue précédemment à l'aide de la fonction `bisect` de `scipy.optimize`.

`scipy.optimize.bisect(f, a, b) :` renvoie la racine de la fonction `f` dans l'intervalle $[a, b]$. `f(a)` et `f(b)` doivent être de signes opposés.