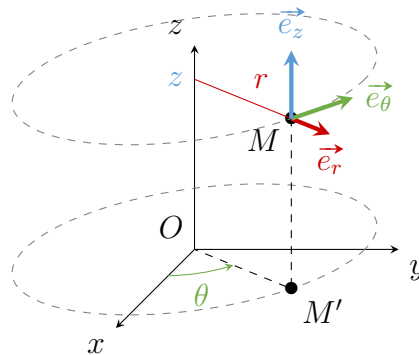


DM08 – Mécanique Correction

Exercice 1 – Mouvement hélicoïdal dans un toboggan

1. Cf. cours.



2. En coordonnées cylindriques, le vecteur position est donné par

$$\boxed{\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z.}$$

3. Cf. cours pour la démo. En coordonnées cylindriques, le vecteur vitesse instantanée est donné par

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z.}$$

4. Cf. cours pour la démo. En coordonnées cylindriques, le vecteur accélération est donné par

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z.}$$

5. Avec $r(t) = R = \text{cste}$, on a $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$, d'où

$$\boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z.}$$

6. On a

$$\boxed{z(\theta) = z_0 - \frac{H\theta}{2\pi}.}$$

On en déduit $\dot{z} = \frac{H\dot{\theta}}{2\pi}$ et $\ddot{z} = \frac{H\ddot{\theta}}{2\pi}$, d'où

$$\boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta - \frac{H\dot{\theta}}{2\pi}\vec{e}_z} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \frac{H\ddot{\theta}}{2\pi}\vec{e}_z.}$$

7. Le mouvement est uniforme si $\|\vec{v}\| = \text{cste}$, c'est-à-dire si

$$\sqrt{R^2\dot{\theta}^2 + \frac{H^2\dot{\theta}^2}{4\pi^2}} = \text{cste} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \text{cste.}}$$

8. On a

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{R^2\dot{\theta}^2 - \frac{H^2\dot{\theta}^2}{4\pi^2}} = \sqrt{2g(z_0 - z)}.$$

On élève au carré et on remplace z par son expression en fonction de θ :

$$R^2\dot{\theta}^2 - \frac{H^2\dot{\theta}^2}{4\pi^2} = 2gH\frac{\theta}{2\pi}, \quad \text{soit} \quad \boxed{\dot{\theta}^2 \left(R^2 + \frac{H^2}{4\pi^2} \right) = \frac{gH}{\pi}\theta}$$

9. On dérive :

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} \left(R^2 + \frac{H^2}{4\pi^2} \right) = \frac{gH}{\pi}\dot{\theta}, \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{\theta} = \frac{gH}{2\pi \left(R^2 + \frac{H^2}{4\pi^2} \right)}}.$$

On intègre une première fois, avec $\dot{\theta}(0) = 0$ (vitesse initiale nulle) :

$$\boxed{\dot{\theta}(t) = \frac{gH}{2\pi \left(R^2 + \frac{H^2}{4\pi^2} \right)} t},$$

puis une nouvelle fois, avec $\theta(0) = 0$:

$$\boxed{\theta(t) = \frac{gH}{4\pi \left(R^2 + \frac{H^2}{4\pi^2} \right)} t^2}.$$

On en déduit

$$\boxed{z(t) = z_0 - \frac{gH^2}{2(4\pi^2R^2 + H^2)} t^2}.$$

$\theta(t)$ et $z(t)$ sont des **fonctions paraboliques du temps**.